# EIN EFFIZIENTES VERFAHREN ZUR BERECHNUNG EINER BASIS VON SUMME UND SCHNITT ZWEIER VEKTORRÄUME

FRANK KLINKER

ZUSAMMENFASSUNG. Wir stellen hier den Zassenhaus-Algorithmus vor. Das ist ein Verfahren, mit dem sich simultan eine Basis des Schnitts und eine Basis der Summe zweier Untervektorräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ des $\mathbb{K}^n$ berechnen lassen. Dabei seien jeweils ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ vorgegeben.

Es seien $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset \mathbb{K}^n$ und $\{w_1, \ldots, w_s\} \subset \mathbb{K}^n$ endliche Teilmengen. Weiter seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ die von diesen Systemen aufgespannten Vektorräume, d.h. $\mathcal{V} := span\{v_1, \ldots, v_r\}$ und $\mathcal{W} := span\{w_1, \ldots, w_s\}$.

Wir definieren die Matrizen $V \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ und $W \in M_{s,n}(\mathbb{K})$ indem wir die Erzeugendensysteme als Zeilen eintragen, also

$$V := \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{pmatrix}, \qquad W := \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_s^T \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir wissen nun aus der Vorlesung, dass wir nach Anwendung des Gaußverfahren auf $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \in M_{r+s,n}(\mathbb{K})$ zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{r+s,n}(\mathbb{K})$ gelangen, wobei in $B = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_k^T \end{pmatrix} \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ die Zeilen linear unabhängig sind. Das Gaußverfahren ist nun so geartet, dass die Zeilen von $B$ Linearkombinationen der Zeilen von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ sind, so dass $\{b_1, \ldots b_k\}$ eine Basis von $\mathcal{V}+\mathcal{W}$ bilden.

Wir können das Gaußverfahren auch mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Bei der Durchführung des Gaußverfahrens treten (höchstens) folgenden Manipulationen der Matrix $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ auf:

*Email:* mail@frank-klinker.de.

- Multiplikation der $i$-ten Zeile mit einer Zahl $a \neq 0$. Das entspricht einer Multiplikation von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ von links mit

$$(2) \qquad i\text{-te Zeile} \to \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: S_i(a) \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})\,.$$

- Addition des $a$-fachen der $j$-ten Zeile zur $i$-ten Zeile. Das entspricht einer Multiplikation von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ von links mit

(3)

$$\begin{matrix} \\ i\text{-te Zeile} \to \\ j\text{-te Zeile} \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & a & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: Q_i^j(a) \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})\,.$$

- Vertauschung der $i$-ten und $j$-ten Zeile. Das entspricht einer Multiplikation von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ von links mit

(4)

$$\begin{matrix} \\ i\text{-te Zeile} \to \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \to \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: P_i^j \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})\,.$$

Inbesondere entspricht jeder Schritt des Gaußverfahrens der Multiplikation von links mit einer Matrix $Z_\alpha \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})$ von einem der obigen Typen. Wenn wir genau $\ell$ Schritte zum Durchführen des Verfahrens benötigen, so

gilt mit $Z := Z_\ell \cdot Z_{\ell-1} \cdot \ldots \cdot Z_1$

$$Z \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

**Bemerkung:** Die Matrix $Z$ erhalten wir explizit, wenn wir das Gaussverfahren statt nur auf die Matrix $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ auf die um die Einheitsmatrix erweiterte Matrix $\left(\mathbb{1} \;\middle|\; \begin{smallmatrix} V \\ W \end{smallmatrix}\right)$ anwenden. Das Ergebnis ist dann gerade $\left(Z \;\middle|\; \begin{smallmatrix} B \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir zerlegen die Matrix $Z \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})$ nun in kleiner Blöcke $Z_{11} \in M_{k,r}(\mathbb{K})$, $Z_{12} \in M_{k,s}(\mathbb{K})$, $Z_{21} \in M_{r+s-k,r}(\mathbb{K})$ $Z_{22} \in M_{r+s-k,r}(\mathbb{K})$ gemäß

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Wenn wir das benutzen, so läßt sich (5) zu

$$Z_{11}V + Z_{12}W = B \tag{7}$$

$$Z_{21}V + Z_{22}W = 0 \tag{8}$$

umschreiben. Setzen wir $(Z_{21})_{ij} = -a_{ij}$ für $1 \le i \le r+s-k$, $1 \le j \le r$ und $(Z_{22})_{ij} = b_{ij}$ für $1 \le i \le r+s-k$, $1 \le j \le s$ so läßt sich (8) auch in Termen der ErzeugendensystemE von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ schreiben:

$$\sum_{j=1}^{s} b_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} v_j, \quad \text{für } 1 \le j \le r+s-k\,. \tag{9}$$

Alle diese $r+s-k$ Vektoren $z_j := \sum_{j=1}^{s} b_{ij} w_j$ liegen somit im Schnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.
Die folgende Überlegung zeigt sogar, dass sie ein Erzeugendensystem für den Schnitt bilden.

Wir betrachten die Vektorräume $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V} \oplus \{0\} \oplus \mathcal{V}$ und $\widehat{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W} \oplus \mathcal{W} \oplus \{0\}$ mit den Erzeugendensystemen $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ v_r \end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} w_s \\ w_s \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Es gelten die folgenden Isomorphismen:

$$\widehat{V} \simeq V, \qquad \widehat{W} \simeq W \tag{10}$$

$$\widehat{V} + \widehat{W} \simeq V \oplus W\,. \tag{11}$$

Die ersten zwei Isomorphismen (10) sieht man sofort, und die letzte (11) ist eine Folgerung aus den ersten beiden und der Dimensionsformel zusammen mit der Tatsache, dass $\widehat{V} \cap \widehat{W} = \{0\}$.

Schreiben wir nun die Basen von $\widehat{\mathcal{V}}$ und $\widehat{\mathcal{W}}$ ebenfalls als Matrizen in der Form

$$\begin{pmatrix} V & 0 & V \\ W & W & 0 \end{pmatrix} \in M_{r+s,3n}(\mathbb{K}) \tag{12}$$

so hat diese Matrix wegen (11) den Rang $\dim(\mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W})$. Dieser ändert sich nicht, wenn wir die Matrix $Z$ darauf wirken lassen. Diese Wirkung liefert

$$Z \begin{pmatrix} V & 0 & V \\ W & W & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & Z_{12}W & Z_{11}V \\ 0 & Z_{22}W & Z_{21}V \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$=: \begin{pmatrix} B & Z_{12}W & Z_{11}V \\ 0 & \tilde{C} & -\tilde{C} \end{pmatrix} . \tag{14}$$

Da $Z$ ein Isomorphismus ist, ändert sich der Rang der Matrix nicht. Da nun die ersten $k$ Zeilen linear unabhängig sind (dies gilt schon für $B$!) sind noch genau $\dim(\mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) - k$ Zeilen der letzten $r + s - k$ Stück linear unabhängig, was gerade der Dimension von $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ entspricht. Also bilden die Zeilen von $Z_{21}V = -Z_{22}W = -\tilde{C}$ ein Erzeugendensystem für $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Eine Basis dieses Schnitts erhalten wir nun, indem wir das Gaußverfahren auf die unteren $r + s - k$ Zeilen der Matrix (14) anwenden. Das hat keinen Effekt auf die ersten $n$ Spalten und wir bekommen schließlich

$$\begin{pmatrix} B & Z_{12}W & Z_{11}V \\ 0 & C & -C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

wobei nun die Zeilen von $B$ und auch die Zeilen von $C$ linear unabhängig sind.

**Anwendung:** Wir wenden das Gaussverfahren entweder auf $\begin{pmatrix} V & V \\ W & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} V & 0 \\ W & W \end{pmatrix}$ an. In beiden Fällen erhalten wir $\begin{pmatrix} B & \star \\ 0 & \pm C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei die Zeilen von $B$ die Basis von $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ und die Zeilen von $C$ eine Basis von $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ bilden.