NÜTZLICHE EIGENSCHAFTEN VON MÖBIUSTRANSFORMATIONEN

FRANK KLINKER

Zusammenfassung. Wir listen hier einige Eigenschaften von Möbiustransformationen auf, die in Verbindung mit der Geometrie der hyperbolischen Ebene nützlich sein können.

1. Die Definition der Möbiustransformation

Es sei

$$GL_2\mathbb{C} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \det A = ad - bc \neq 0 \right\} \subset Mat_2\mathbb{C}$$

die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2-Matrizen.

Zu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ heißt die Abbildung τ_A mit der Abbildungsvorschrift

$$\tau_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

eine *Möbiustransformation.*

2. Strukturelle Eigenschaften der Möbiustransformationen

(1) Der Definitions- und Wertebereich der Möbiustransformation τ_A ist
- $D = \mathbb{C}$ und $W = \mathbb{C}$ falls $c = 0$,
- $D = \mathbb{C}\backslash\{\frac{-d}{c}\}$ und $W = \mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\}$, falls $c \neq 0$.

(2) Für die Hintereinanderausführung zweier Möbiustransformationen gilt

$$\tau_A \circ \tau_B = \tau_{AB}\,,$$

zumindest dort, wo die Abbildungen definiert sind.

(3) Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe $\mathfrak{M}$ und die Abbildung $\mathcal{T} : GL_2\mathbb{C} \to \mathfrak{M}$ mit $\mathcal{T}(A) := \tau_A$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(4) Es ist $\ker \mathcal{T} = \{\zeta\, \mathbb{1} \mid \zeta \in \mathbb{C}^*\}$. Deshalb ist genau dann $\tau_A = \tau_B$, wenn $A = \eta B$ für eine Zahl $\eta \in \mathbb{C}^*$.

Email: frank.klinker@math.tu-dortmund.de.

(5) Man kann zu $A \in GL_2\mathbb{C}$ eine Matrix $\widetilde{A}$ mit einfacher Gestalt angeben, sodass $\tau_{\widetilde{A}} = \tau_A^{-1}$. Dazu wähle man zu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix $A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(6) Für eine Möbiustransformation $\tau_A \in \mathfrak{M}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei $\Delta(A) := (a+d)^2 - 4\det(A)$. Dann gilt:
- Ist $\Delta(A) \neq 0$ und $c \neq 0$, dann hat τ_A genau zwei Fixpunkte.
- Ist entweder $\Delta(A) = 0$ oder $c = 0$, so hat τ_A genau einen Fixpunkt.
- In allen anderen Fällen ist $\tau_A = \mathrm{id}$ – falls $b = 0$ – oder es gibt keinen Fixpunkt – falls $b \neq 0$.

(7) Jedes $\tau_A \in \mathfrak{M}$ kann man als Komposition spezieller Möbiustransformationen der Form

$$\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(z) = \frac{1}{z}\,, \quad \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(z) = az\,, \quad \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(z) = z + b$$

darstellen.

3. Abbildungseigenschaften von Möbiustransformationen

Notation: Als *verallgemeinerte Kreise* bezeichnet man in der komplexen Ebene die Menge der Kreise und Geraden.

(8) Man kann $\tau_A \in \mathfrak{M}$ als Abbildung von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in sich interpretieren. Dazu definiert man

$$\begin{cases} \tau_A(\frac{-d}{c}) = \infty \quad \text{und} \quad \tau_A(\infty) = \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \\ \tau(\infty) = \infty & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

In diesem Sinne sind die Geraden genau die verallgemeinerten Kreise, die den Punkt ∞ enthalten.

(9) $\tau_A \in \mathfrak{M}$ bildet verallgemeinerte Kreise im Definitionsbereich auf verallgemeinerte Kreise im Wertebereich ab. Genauer gilt
- Kreise, die durch $-\frac{d}{c}$ verlaufen, werden auf Geraden abgebildet, die nicht durch $\frac{a}{c}$ verlaufen
- Kreise, die nicht durch $-\frac{d}{c}$ verlaufen, werden auf Kreise abgebildet, die nicht durch $\frac{a}{c}$ verlaufen
- Geraden, die durch $-\frac{d}{c}$ verlaufen, werden auf Geraden abgebildet, die durch $\frac{a}{c}$ verlaufen
- Geraden, die nicht durch $-\frac{d}{c}$ verlaufen, werden auf Kreise abgebildet, die durch $\frac{a}{c}$ verlaufen

(10) Schneiden sich zwei verallgemeinerte Kreise, so schneiden sich ihre Bilder unter einer Möbiustransformation mit dem gleichen Schnittwinkel.

(11) Das *Doppelverhältnis* vier unterschiedlicher komplexer Zahlen z_0, z_1, z_2, z_3 ist definiert durch

$$DV(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Das Doppelverhältnis lässt sich auch geeignet definieren, wenn $z_i = \infty$, oder, wenn zwei Zahlen übereinstimmen.

(12) Die Abbildung τ mit

$$\tau(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$$

ist eine Möbiustransformation mit $\tau(z_1) = 0$, $\tau(z_2) = 1$ und $\tau(z_3) = \infty$.

(13) Ist $\tau \in \mathfrak{M}$ mit $\tau(z_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$, so ist

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(\tau(z), w_1, w_2, w_3).$$

D. h. das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.

(14) mit dem Doppelverhältnis kann man eine explizite Formel für $\tau \in \mathfrak{M}$ zu drei vorgegebenen Wertepaaren herleiten: Sind (z_1, w_1), (z_2, w_2) und (z_3, w_3) gegeben, dann gibt es genau eine Möbiustransformation, die $\tau(z_i) = w_i$ erfüllt.

4. Halbebene und Einheitskreisscheibe

(15) Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $E := B_0(1)$ die offene Einheitskreisscheibe. Dann bildet $\sigma \in \mathfrak{M}$ mit

$$\sigma(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

H bijektiv auf E ab und es gilt $\sigma^{-1}(z) = -i\dfrac{z+1}{z-1}$.

(16) Eine schöne Übung ist die Bestimmung der Bilder unter σ von

$$\bar{E}, \quad B_{\frac{1}{2}}(0), \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}.$$

(17) Sei $\tau_A \in \mathfrak{M}$. Ist $\tau_A(\mathbb{R}\backslash\{\frac{-d}{c}\}) \subset \mathbb{R}$ falls $c \neq 0$ oder $\tau_A(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ falls $c = 0$ dann gibt es eine komplexe Zahl $\zeta \in \mathbb{C}^*$, sodass ζA eine reelle Matrix ist.

(18) Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ reell, so gilt für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{-d}{c}\}$ falls $c \neq 0$ oder für alle $z \in \mathbb{C}$ falls $c = 0$:

$$\mathrm{Im}(\tau_A(z)) = \frac{\det(A)}{|cz + d|^2}\mathrm{Im}(z).$$

Daraus folgt:

$$\tau_A(H) = H \iff \exists \zeta \in \mathbb{C}^* : \ \zeta A \text{ ist reell und } \det(\zeta A) > 0\,.$$

(19) Mit Hilfe der speziellen Möbiustransformation $\sigma(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ folgert man nun:

$$\tau_A(E) = E \iff \exists \zeta \in \mathbb{C}^* : \ \zeta A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ und } \det(\zeta A) > 0\,.$$

(20) Man kann die Möbiustransformationen $\tau \in \mathfrak{M}$ mit $\tau(E) = E$ auch wie folgt darstellen:

$$\tau(z) = e^{it} \cdot \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}, \quad t \in \mathbb{R}, |z_0| < 1\,.$$

5. Die obere Halbebene als Hyperbolische Ebene

(21) Die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ ist mit der Metrik

$$g_z(\vec{v}, \vec{w}) = \left(\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}\right)^2 \vec{v}^T \vec{w}$$

eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine globale Karte ist durch die reelle Beschreibung $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 > 0\}$ gegeben. Bezüglich dieser Karte hat die Metrik g die Darstellung $g_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2^2}\delta_{ij}$.

(22) Bezüglich der globalen Karte von H ist für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(x_1, x_2) &= (ax_1, ax_2) \\
\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(x_1, x_2) &= (x_1 + b, x_2) \\
\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(x_1, -x_2)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
D_{(x_1,x_2)}\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} &= a\mathbb{1} \\
D_{(x_1,x_2)}\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} &= \mathbb{1} \\
D_{(x_1,x_2)}\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} &= \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(23) Für alle reellen Möbiustransformationen τ_A gilt

$$\left(D_{(x_1,x_2)}\tau_A\right)^T D_{(x_1,x_2)}\tau_A = \left(\frac{\left(\tau_A(x_1, x_2)\right)_2}{x_2}\right)^2 \mathbb{1}$$

(24) Es seien $z, w \in H$. Weiter sei $c : [0, \ell] \to H$ mit $c(0) = z, c(\ell) = w$ eine Beschreibung des verallgemeinerten Kreises, der die beiden Punkte in H

verbindet. Dann heißt

$$\mathcal{L}(z,w) := \int_0^\ell \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt$$

der verallgemeinerte Abstand der Punkte z und w.

Der verallgemeinerte Abstand ist invariant unter reellen Möbiustransformationen. Das heißt, ist τ_A eine reelle Möbiustransformationen, dann gilt

$$\mathcal{L}(z,w) = \mathcal{L}(\tau_A(z), \tau_A(w))\,.$$

Hinweis: Ist τ_A eine reelle Möbiustransformation und a, w und $c : [0,\ell] \to H$ wie oben, dann ist $\tilde{c} = \tau_A \circ c : [0,\ell] \to H$ eine Beschreibung des verallgemeinerten Kreises ist, der $\tau_A(z)$ und $\tau_A(w)$ verbindet.

(25) Die Abbildung $d : H \times H \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ mit

$$d(z,w) := \ln\left(\frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}\right)$$

ist invariant unter reellen Möbiustransformationen. Das heißt, ist τ_A eine reelle Möbiustransformation, dann ist

$$d(z,w) = d\big(\tau_A(z), \tau_A(w)\big)\,.$$

(26) Für alle $z, w \in H$ ist

$$\mathcal{L}(z,w) = d(z,w)$$

Hinweis: Es reicht, diese Identität für Punkte z und w zu zeigen, die auf der positiven imaginären Achse liegen.