Frank Klinker

Wachstums- und Zerfallsprozesse

Beschränktheit, kleinste/größte obere/untere Schranke

Aufgabe 1. Die unten angegebenen Funktionen beschreiben einen Wachstums- oder einen Zerfallsprozess. Für jede der Funktionen bearbeiten Sie folgende Aufgaben:

a) Geben Sie mit einer kurzen Begründung an, um welche Art von Prozess es sich handelt.

b) Untersuchen Sie, ob der Wachstumsprozess nach oben bzw. der Zerfallsprozess unten beschränkt ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Geben Sie für die beschränkten Wachstumsprozesse eine kleinste ober Schranke S und für die beschränkten Zerfallsprozesse eine größte untere Schranke S an und begründen Sie Ihre Wahl wie folgt:

   c1) Zeigen Sie, dass es bei S sich um eine obere/untere Schranke handelt.

   c2) Bestimmen Sie zu jedem Abstand ϵ zu Ihrer Schranke S einen Wert t_ϵ gibt, sodass $f(t) < S+\epsilon$ (im Fall eines Zerfallsprozesses) oder $f(t) > S-\epsilon$ (im Fall eines Wachstumsprozesses) für alle $t > t_\epsilon$.

d) Skizzieren Sie die Funktionen, indem Sie z. B. Ihre Kenntnis über Teilfunktionen verwenden aus denen die Funktion zusammengesetzt ist oder indem Sie einige geeignete Funktionswerte berechnen, eine Wertetabelle erstellen und die Werte in ein Koordinatensystem übertragen.

Hinweis: In einigen Fällen bietet es sich an, den Funktionsausdruck zunächst umzuformen.

1) $f(t) = 2 - e^{-4t}, \quad t \in \mathbb{R}$

2) $f(t) = 4 + \dfrac{1}{3t^3}, \quad t > 0$

3) $f(t) = 1 + e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

4) $f(t) = \dfrac{1 - e^{2t}}{e^{2t}}, \quad t \in \mathbb{R}$

5) $f(t) = \dfrac{2+t}{1+t}, \quad t > -1$

6) $f(t) = \dfrac{-t^2+5}{2+t}, \quad t > -2$

7) $f(t) = 80 - 60e^{-\frac{t}{240}}, \quad t \in \mathbb{R}$

8) $f(t) = \dfrac{4}{1+0{,}125\,t^2}, \quad t > 0$

9) $f(t) = \dfrac{100}{4+e^{-\frac{1}{4}t}}, \quad t \in \mathbb{R}$

10) $f(t) = \dfrac{100}{4+e^{\frac{1}{4}t}}, \quad t \in \mathbb{R}$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 23. Januar 2025