

## Analytische Geometrie

### Teil 5.1: Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

---

#### Aufgabe 1.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene  $\mathcal{E}$  und der Geraden  $\mathbf{g}$  und berechnen Sie ggf. den Durchstoßpunkt der Geraden mit der Ebene.

$$\text{a) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 13 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -50 \\ 72 \\ -98 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{h) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

---

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: [mail@frank-klinker.de](mailto:mail@frank-klinker.de)

Version: 10. September 2023

$$\text{j) } \mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 2.

Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene durch die Punkte  $A, B, C$  und eine der Geraden durch die Punkte  $P, Q$  auf. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene und der Geraden.

a)  $A(3/0/4), B(5/0/8), C(1/0/0), P(2/1/1), Q(2/-1/3)$

b)  $A(1/1/-5), B(2/1/-2), C(2/1/1), P(3/0/3), Q(2/2/1)$

c)  $A(-1/0/2), B(1/1/3), C(0/1/2), P(-2/1/3), Q(2/1/4)$

d)  $A(2/1/0), B(2/2/0), C(4/1/4), P(4/1/5), Q(5/1/4)$

### Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene  $\mathcal{E}$  und der Geraden  $\mathbf{g}$ . Bestimmen Sie den Parameter  $a$  jeweils so, dass die Gerade (i) echt parallel zur Ebene verläuft, (ii) innerhalb der Ebene verläuft und (iii) mit der Ebene einen Durchstoßpunkt gemeinsam hat.

a)  $\mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ a+4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ a+4 \\ a+2 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a+2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)  $\mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a+2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -a \end{pmatrix}$

c)  $\mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2a+4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2+2a \\ 8-a \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a \\ -3 \\ 3-3a \end{pmatrix}$

d)  $\mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a+2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-a \\ a-3 \\ -2 \end{pmatrix}$

e)  $\mathcal{E} : \vec{x}(t, s) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a^2 - 4a + 3 \\ 3a - 3 \\ a^2 - 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2a + 4 \\ -4 \\ a^2 - 3a - 14 \end{pmatrix},$

$$\mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2a \\ a+1 \\ 5a+4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-a \\ -1 \\ -a-1 \end{pmatrix}$$