Frank Klinker

Aufgaben: Kurvendiskussion

Teil 4.2: Funktionen mit Parametern II

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktionenschar $f_t(x)$ durch

$$f_t(x) = t^2\left(x + \frac{1}{t}\right)e^{-tx} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R}\,, t > 0$$

a) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich für alle Funktionen $f_t(x)$ stets ganz $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeigen Sie durch nachvollziehbare Rechnungen, dass die ersten drei Ableitungen der Funktion $f_t(x)$ durch

$$f_t'(x) = -t^3xe^{-tx} \qquad f_t''(x) = t^4\left(x - \frac{1}{t}\right)e^{-tx} \qquad f_t'''(x) = -t^5\left(x - \frac{2}{t}\right)e^{-tx}$$

gegeben sind.

c) Bestimmen Sie rechnerisch für den Graphen von $f_t(x)$:

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
- Hoch- und Tiefpunkte,
- Wendepunkte.

d) Beurteilen Sie, ob man den Parameter t so wählen kann, dass bei $x = -560$ ein Wendepunkt vorliegt?

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte.

f) Diskutieren Sie das Verhalten des Graphen von $f_t(x)$ für $|x| \to \infty$.

g) Skizzieren Sie den Graphen von $f_1(x)$ für x im Intervall $[-1{,}5\,;\,4]$.

h) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die allgemeine Form der n-ten Ableitung durch

$$f_t^{(n)}(x) = (-1)^n t^{n+2}\left(x - \frac{n-1}{t}\right)e^{-tx}$$

gegeben ist.

i) Der Parameterbereich soll auf $t < 0$ erweitert werden.
Wie erhalten Sie den Graphen von $f_{-t}(x)$ aus dem Graphen von $f_t(x)$? Begründen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.

j) Berechnen Sie die Flächeninhalt $A(z)$ der Fläche zwischen dem Graphen von $f_t(x)$ und der x-Achse über dem Intervall $[-1\,;\,z]$ mit $z > -1$.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{z\to\infty} A(z)$.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 24. September 2024

Aufgabe 2. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion $f_t(x)$ gegeben durch

$$f_t(x) = \left(\frac{x}{t} + 1\right) e^{t-x}\,.$$

Der Graph von $f_t(x)$ wird mit K_t bezeichnet.

a) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich für alle Funktionen $f_t(x)$ stets ganz $\mathbb{R}$ ist.

c) Bestimmen Sie rechnerisch für K_t:

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
- Hoch- und Tiefpunkte,
- Wendepunkte.

c) Untersuchen Sie K_t auf Asymptoten.

d) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion $f_1(x)$ und der Ableitungsfunktion $f_1'(x)$ im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ in ein gemeinsames Achsenkreuz (1 LE = $2\,cm$).

e) Zeigen Sie, dass für jedes $t > 0$ die Graphen von $f_t(x)$ und $f_t'(x)$ genau einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, indem Sie diesen berechnen.

Der Graph K_1, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ mit $b > -1$ schließen eine Fläche ein.

e) Berechnen Sie den Flächenhalt $A(b)$ der entstehenden Fläche.

f) Berechnen Sie auch $\lim\limits_{u\to\infty} A(b)$.

Aufgabe 3. Ein Modell beschreibt den Webseitenzugriff einer Firma. Für die Zeit zwischen 10:00 Uhr und 22:00 Uhr gilt

$$f_k(t) = 4t^2e^{2-kt} + 10 \quad \text{mit} \quad k \in\,]0{,}2\,;1[\quad \text{und} \quad t \in [0\,;12]\,.$$

t gibt hierbei die Zeit ab 10:00 Uhr in Stunden an und $f_k(t)$ beschreibt die Besucherzahl in 1000. Die Wahl des Parameters k ist abhängig von der Art der betrachteten Webseite.

a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Änderungsrate der Besucherzahlen durch

$$f_k'(t) = (8t - 4kt^2)e^{2-kt}$$

beschrieben wird. Zeigen Sie ebenfalls durch Rechnung, dass

$$f_k''(t) = 4(k^2t^2 - 4kt + 2)e^{2-kt}\,.$$

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter k den Zeitpunkt $t \in\,]0\,;12[$, zu der sich laut Modell die meisten Besucher auf der Webseite befinden.

c) Um 13:00 Uhr besuchen 70000 Menschen die Webseite. Berechnen Sie den zugehörigen Parameter k.

Im Folgenden wird das Modell durch die Wahl $k = 0{,}5$ fixiert.

d) Geben Sie an, wie viele Besucher die Webseite um 12:00 Uhr hat.

e) Der Server war um 13:20 Uhr noch erreichbar, fiel danach allerdings zu einem Zeitpunkt innerhalb der folgenden 20 Minuten aus. Zu diesem Zeitpunkt waren 73000 Besucher auf der Webseite.

   Berechnen Sie mit einem geeigneten numerischen Verfahren mit einer Genauigkeit von drei Nachkommastellen, um wie viel Uhr der Server ausgefallen ist.

   Hinweis: Als Startwert bietet sich $t = 3{,}5$ an, also 13:30 Uhr.

f) Berechnen Sie den Zeitpunkt zu dem die Änderungsrate der Besucher am größten ist.

g) Um 18:00 Uhr verliert die Funktion $f_{0,5}$ ihre Aussagekraft. Ab diesem Zeitpunkt wird statt dessen die Besucherzahl durch eine lineare Funktion $g(t)$ modelliert.

   Dabei stimmen um 18:00 Uhr die Besucherzahlen in den beiden Funktionen überein. Ebenso sind zu diesem Zeitpunkt die Änderungsraten beider Funktionen gleich.

   Ermitteln Sie ausgehend von diesen Informationen, zu welcher Uhrzeit in dem geänderten Modell niemand mehr die Webseite besucht.