

Aufgaben: Zahlentheorie
Teil 2.1: Modulares Rechnen mit ganzen Zahlen

Aufgabe 1. a) Berechnen Sie:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| i) $3 \cdot 5 \pmod{12}$ | ii) $14 \cdot (-25) \pmod{4}$ |
| iii) $-7 + 19 \pmod{3}$ | iv) $(-4) + 18 \pmod{6}$ |
| v) $8 \cdot (114 + 300) \pmod{3}$ | vi) $(17 \cdot 9) \cdot 132 \pmod{12}$ |

b) Überprüfen Sie die Rechnungen und korrigieren Sie gegebenenfalls:

- | | |
|--------------------------------|--|
| i) $14 - 15 \equiv 3 \pmod{4}$ | ii) $157 \cdot 151 \equiv -5 \pmod{3}$ |
| iii) $583^3 \equiv 1 \pmod{4}$ | iv) $5^{121} \equiv 1 \pmod{6}$ |

Aufgabe 2. Berechnen Sie möglichst geschickt unter Ausnutzung der gültigen Rechenregeln:

- | | |
|--|----------------------------------|
| a) $12 \cdot 27 \pmod{13}$ | b) $112 \cdot 917856 \pmod{4}$ |
| c) $3100 + 201 \pmod{5}$ | d) $423 + 21 \cdot 313 \pmod{5}$ |
| e) $105 \cdot 82 + 213 \cdot 197 \pmod{9}$ | f) $5^{121} \pmod{7}$ |

Aufgabe 3.

Die 13-stellige Europäische-Artikel-Nummer (EAN-13) besteht aus 12 Ziffern, die einen Artikel eindeutig identifizieren. Dazu kommt eine dreizehnte Prüfziffer, an der man erkennen kann, ob die vorigen Ziffern korrekt sind. Diese Nummer wird durch einen Strichcode ergänzt.

Wir nummerieren die Ziffern der EAN-13 von vorne nach hinten durch, wobei P die Prüfziffer bezeichnet:

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9 z_{10} z_{11} z_{12} P$$



Grafik: [Wikipedia](#)



Grafik: F.K.

Die Prüfziffer ergibt sich aus den ersten zwölf Ziffern wie folgt:

$$(z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + z_{11}) + 3 \cdot (z_2 + z_4 + z_6 + z_8 + z_{10} + z_{12}) + P \equiv 0 \pmod{10}$$

- a) Überprüfen Sie, ob die Prüfziffer in dem Beispiel aus der Wikipedia korrekt ist.
- b) In der zweiten Grafik ist die Prüfziffer abhanden gekommen. Berechnen Sie diese.

Aufgabe 4. a) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für das Rechnen modulo 11 auf.

b) Berechnen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für \mathbb{Z}_8 .

Aufgabe 5. a) Begründen Sie, warum eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

b) Begründen Sie, warum die "Quersummenregel" auch für den Teiler 9 gilt, aber für keinen anderen Teiler.

c) Formulieren Sie auf der Basis der bisherigen Überlegungen eine alternative Quersummenregel für den Teiler 11.