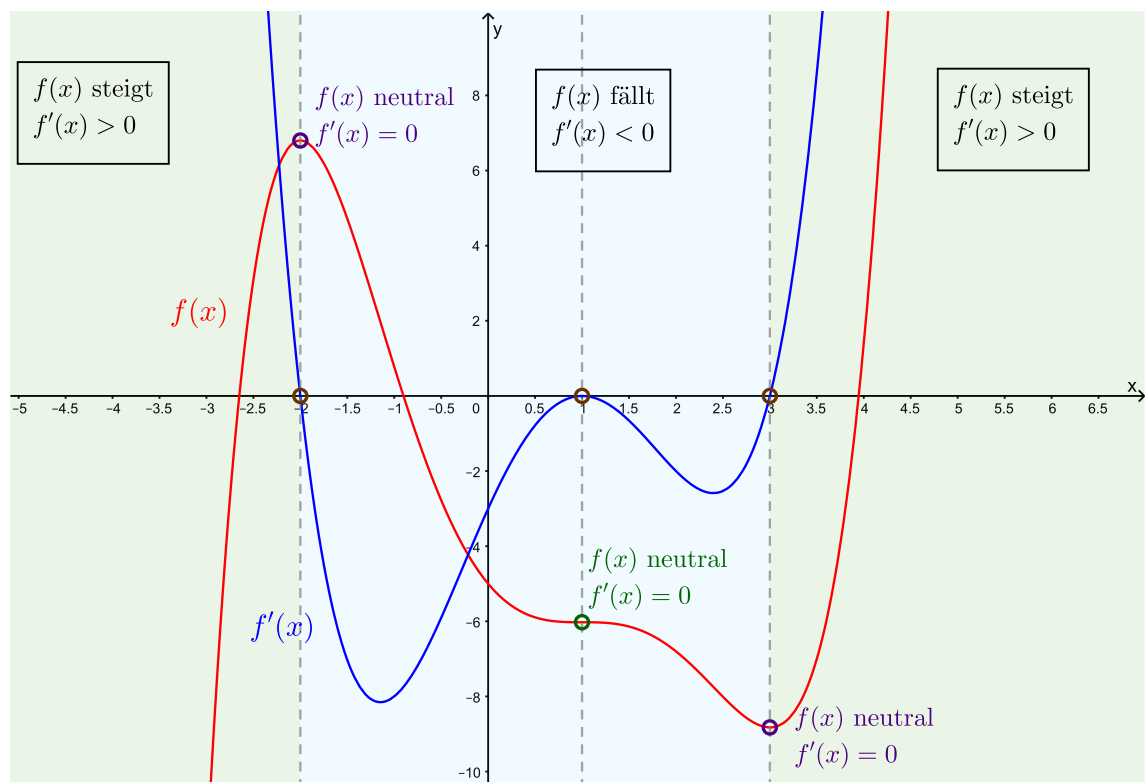


Kurvendiskussion

Teil 2: Extrema, Sattelpunkte und Wendepunkte

1 Wiederholung: Qualitative Aspekte der Ableitung

Abbildung 1:
$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{4}x^2 - 3x - 5$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$



Der Wert $f'(x_0)$ der Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 ist das Maß für die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 .

Ob der Graph von $f(x)$ steigt oder fällt, erkennt man am Vorzeichen von $f'(x)$:

- $f'(x)$ ist positiv an den Stellen, wo $f(x)$ steigt
- $f'(x)$ ist negativ an den Stellen, wo $f(x)$ fällt

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 7. November 2023

- $f'(x)$ hat Nullstellen an den Stellen, wo die Steigung von $f(x)$ neutral ist

Und weiter:

- Je stärker eine Funktion steigt, desto größer ist der positive Wert der Ableitungsfunktion.
- Je stärker eine Funktion fällt, desto kleiner ist der negative Wert der Ableitungsfunktion.

2 Neutrale Steigung: Extrema und Sattelpunkte

Wir schauen uns nun die Stellen genauer an, an denen eine Funktion $f(x)$ neutrale Steigung hat. Das sind die Stellen, wo sie weder fällt noch steigt. Dies sind genau die Nullstellen der Ableitung $f'(x)$.

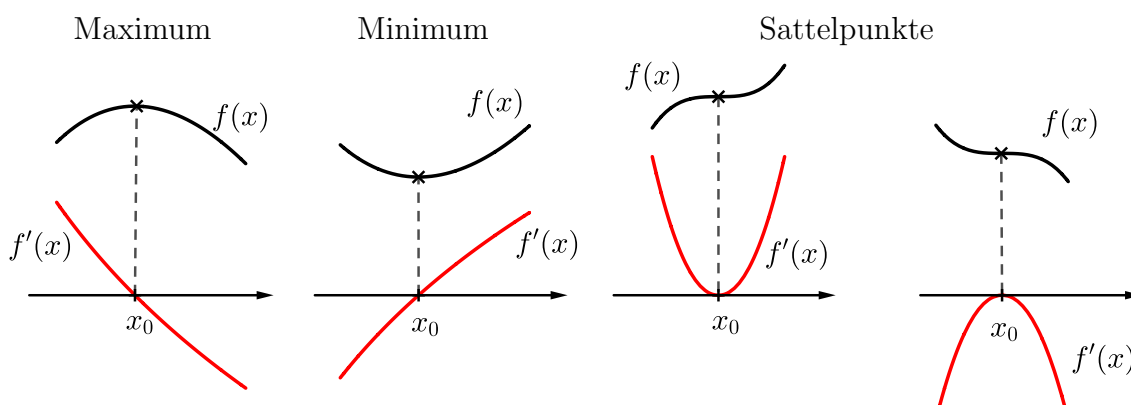
In Abb. 1 sehen wir, dass die Nullstellen der Ableitung oftmals (aber nicht immer) ein **Extremum** beschreiben, d. h. ein **Maximum** oder ein **Minimum**.

Ein Punkt mit neutraler Steigung, der kein Maximum oder Minimum ist, heißt **Sattelpunkt**.

2.1 Die Unterscheidung der Punkte mit neutraler Steigung

In der folgenden Abb. 2 sind vier Funktionen und ihre Ableitungen skizziert, die alle Fälle neutraler Stellen auslisten, die vorkommen können:

Abbildung 2: Die möglichen Fälle von Punkten mit neutraler Steigung



Das kann man in dem sehr Anwendungsfreundlichen Vorzeichenwechselkriterium zusammenfassen:

Das Vorzeichenwechselkriterium zur Unterscheidung der Punkte von $f(x)$ mit neutraler Steigung

Hat die Ableitung $f'(x)$ eine Nullstelle in $x = x_0$, dann ist der Punkt $(x_0/f(x_0))$

- ein **Maximum** von $f(x)$, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = x_0$ das Vorzeichen von positiv zu negativ wechselt.
- ein **Minimum** von $f(x)$, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = x_0$ das Vorzeichen von negativ zu positiv wechselt.
- ein **Sattelpunkt** von $f(x)$, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = x_0$ das Vorzeichen nicht wechselt.

2.2 Erste Beispiele

Beispiel 1. Wir untersuchen die allgemeine quadratische Funktionen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

auf Extrema.

Wir haben das bereits früher gemacht, indem wir z. B. die quadratische Funktion von der Normalform in die Scheitelpunktform gebracht und den Scheitelpunkt abgelesen haben, siehe z. B. <https://youtu.be/jsbVtNa5-hg>.

Mit unseren neuen Mitteln finden wir diesen Scheitelpunkt, indem wir zunächst die Ableitungsfunktion berechnen:

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Das Extremum liegt an der Nullstelle der Ableitung. Dass es sich hier tatsächlich um ein Extremum handelt und nicht um einen Sattelpunkt, liegt daran, dass die Ableitung als lineare Funktion an der Nullstelle das Vorzeichen wechselt.

$$f'(x) = 0 \iff 2ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}.$$

Als Funktionswert erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= -\frac{b^2}{4a} + c \\ &= \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

und das gibt den Scheitelpunkt $SP\left(-\frac{b}{2a} \middle/ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Beispiel 2. Wir untersuchen die Funktion $f(x) = 4x^3 + 36x^2 - 84x - 400$ auf Extrema. Die möglichen Extremstellen erhalten wir als Nullstellen der Ableitung

$$f'(x) = 12x^2 + 72x - 84.$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} 12x^2 + 72x - 84 = 0 &\iff x^2 + 6x - 7 \\ &\iff x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7} \\ &\iff x_{1,2} = -3 \pm 4 = -7; 1 \end{aligned}$$

Unsere möglichen Extrema liegen also an den Stellen $x = -7$ und $x = 1$.

Eine quadratische Funktion mit zwei Nullstellen wechselt an beiden Nullstellen das Vorzeichen.

Da unsere Ableitung eine solche quadratische Funktion ist, sind unsere beiden berechneten Stellen tatsächlich die x -Werte zweier Extrema der Funktion $f(x)$.

Wir berechnen

$$f(-7) = 580 \quad \text{und} \quad f(1) = -444,$$

sodass $M_1(-7/580)$ das Maximum und $M_2(1/-444)$ das Minimum ist.

Beispiel 3. Wir untersuchen die Punkte mit neutraler Steigung der Funktion $f(x) = x^6 - 1,2x^5 + 1,5x^4 - 2x^3 + 0,5$. Dazu benötigen wir die Nullstellen der Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 6x^2 \\ &= 6x^2(x^3 - x^2 + x - 1) \\ &= 6x^2(x^2(x-1) + (x-1)) \\ &= 6x^2(x-1)(x^2+1) \end{aligned}$$

Jetzt ist $f'(x) = 0$ wenn einer der Faktoren Null ist. Die Nullstellen von $f'(x)$ sind also $x = 0$ und $x = 1$ mit $f(0) = 0,5$ und $f(1) = -0,2$.

Zur Charakterisierung der Punkte $(0/0,5)$ und $(1/-0,2)$ nutzen wir das Vorzeichenwechselkriterium:

$(0/0,5)$: Als Wertetabelle um den x -Wert des Punktes $(0/0,5)$ wählen wir

x	-0,1	0	0,1
$f'(x)$	$\approx -0,07$	0	$\approx -0,05$

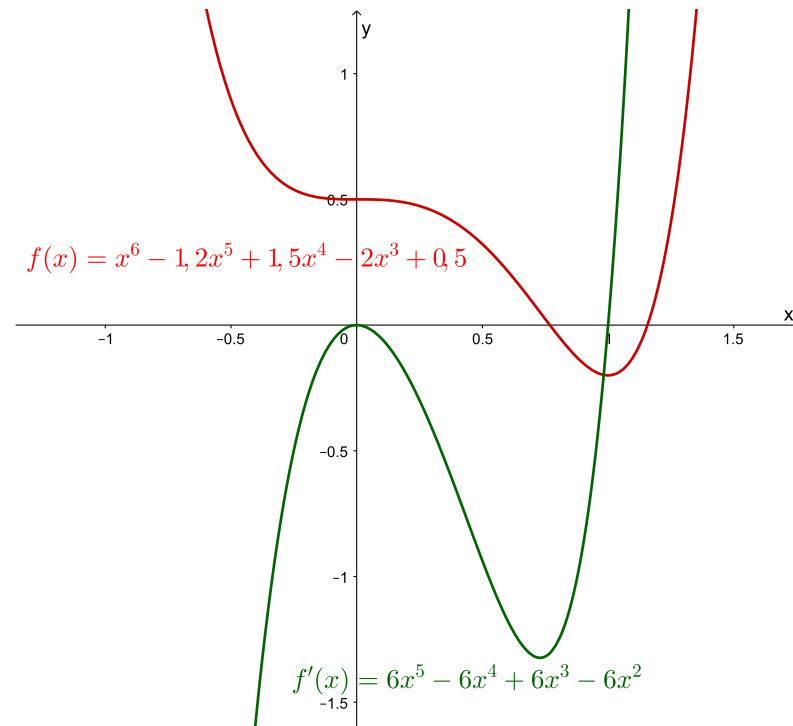
Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ wechselt um $x = 0$ nicht das Vorzeichen, daher handelt es sich bei $(0/0,5)$ um einen Sattelpunkt.

$(1/-0,2)$: Als Wertetabelle um den x -Wert des Punktes $(1/-0,2)$ wählen wir

x	0,9	1	1,1
$f'(x)$	$\approx -0,88$	0	$\approx 1,60$

Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ wechselt um $x = 1$ das Vorzeichen von negativ zu positiv, daher handelt es sich bei $(1/-0,2)$ um ein Minimum.

Abbildung 3: Grafik zu Beispiel 3



VORSICHT

Auch wenn wir hier stets von Extrema und Maximum oder Minimum sprechen, so muss man sich klar machen, dass es sich nur um lokale Extrema handelt.

Das heißt: Befindet man sich "in der Nähe des Punktes", dann findet man keine größeren bzw. kleineren Funktionswerte.

Sieht man sich die Funktion allerdings im Großen an, so kann es selbstverständlich größere oder kleinere Funktionswerte geben.

Das sehen wir bereits bei den Graphen ganzrationaler Funktion für betragsmäßig große x -Werte.

2.3 Anwendung: Charakterisierung ganzrationaler Funktionen dritten Grades

Wir nutzen das Erarbeitete nun, um die ganzrationalen Funktionen vom Grad 3 zu charakterisieren. Die Ableitung einer Funktion dritten Grades ist immer eine quadratische Funktion.

Für die Ableitung gilt damit:

- 1) Sie hat entweder zwei Nullstellen (mit Vorzeichenwechsel)
- 2) oder sie hat eine Nullstelle (ohne Vorzeichenwechsel)
- 3) oder sie hat keine Nullstelle.

Für die Funktion dritten Grades bedeutet das dann:

- 1) Sie hat zwei Extrema, siehe auch Beispiel 1 a)
- 2) oder sie hat einen Sattelpunkt
- 3) oder sie hat keine neutrale Stelle.

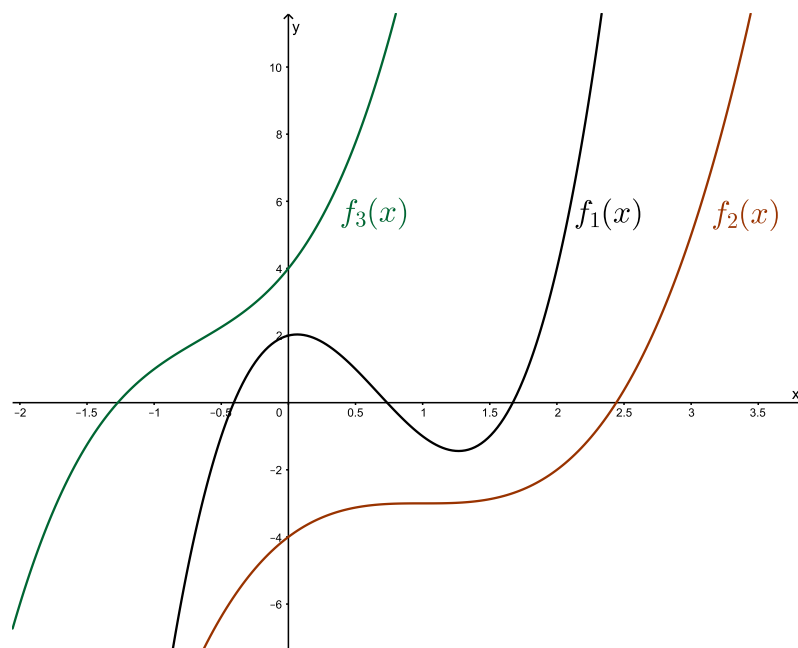
Wir fassen zusammen: Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat entweder zwei Extrema, $f_1(x)$, oder einen Sattelpunkt, $f_2(x)$, oder kein Extremum, $f_3(x)$.

Nehmen wir an, dass der Leitkoeffizient positiv ist, dann kann eine solche Funktion dritten Grades einen der qualitativen Verläufe aus Abb. 4 haben.

Indem wir die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ nach oben oder unten verschieben, sehen wir, dass die Funktionen die folgende Anzahl an Nullstellen haben können.

- Eine Funktion mit dem typischen Verlauf von $f_1(x)$ kann entweder eine, zwei oder drei Nullstellen haben.
- Eine Funktion mit dem typischen Verlauf von $f_2(x)$ oder $f_3(x)$ hat immer genau eine Nullstelle.

Abbildung 4: Typischer Verlauf der Graphen ganzrationaler Funktionen dritten Grades (hier: $f_1(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 2$, $f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$, $f_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 4$)



3 Punkte mit maximaler oder minimaler Steigung / Wendepunkte

Als nächstes sehen wir uns die Punkte an, wo die Steigung einer Funktion $f(x)$ am größten oder am kleinsten ist. Diese Punkte heißen **Wendepunkte**.

3.1 Charakterisierung der Wendepunkte

Wir wissen, dass die Steigung durch die Ableitungsfunktion $f'(x)$ beschrieben wird. Die Wendepunkte von $f(x)$ sind also die sind also die Extrema von $f'(x)$.

Potentielle Kandidaten für Wendepunkte bekommen wir also, indem wir zunächst nach Nullstellen der zweiten Ableitung von $f(x)$ suchen.

Das Vorzeichenwechselkriterium für Extrema liefert uns direkt ein Kriterium, mit dem wir anschließend die tatsächlichen Wendepunkte herausfinden:

Das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung der Wendepunkte von $f(x)$

Hat die zweite Ableitung $f''(x)$ eine Nullstelle in $x = x_0$, dann ist der Punkt $(x_0/f(x_0))$ ein **Wendepunkt** von $f(x)$, wenn $f''(x)$ an der Stelle $x = x_0$ das Vorzeichen wechselt.

Beispiel 4. Im Beispiel aus Abb. 1 haben wir in Abb. 5 die zweite Ableitung $f''(x)$ ergänzt. Hier erkennt man sehr gut den Zusammenhang

$$\text{Wendepunkte von } f(x) \longleftrightarrow \text{Extrema von } f'(x) \longleftrightarrow \text{Nullstellen von } f''(x)$$

3.2 Die Krümmung

Die zweite Ableitung einer Funktion beschreibt die Änderung der Steigung einer Funktion.

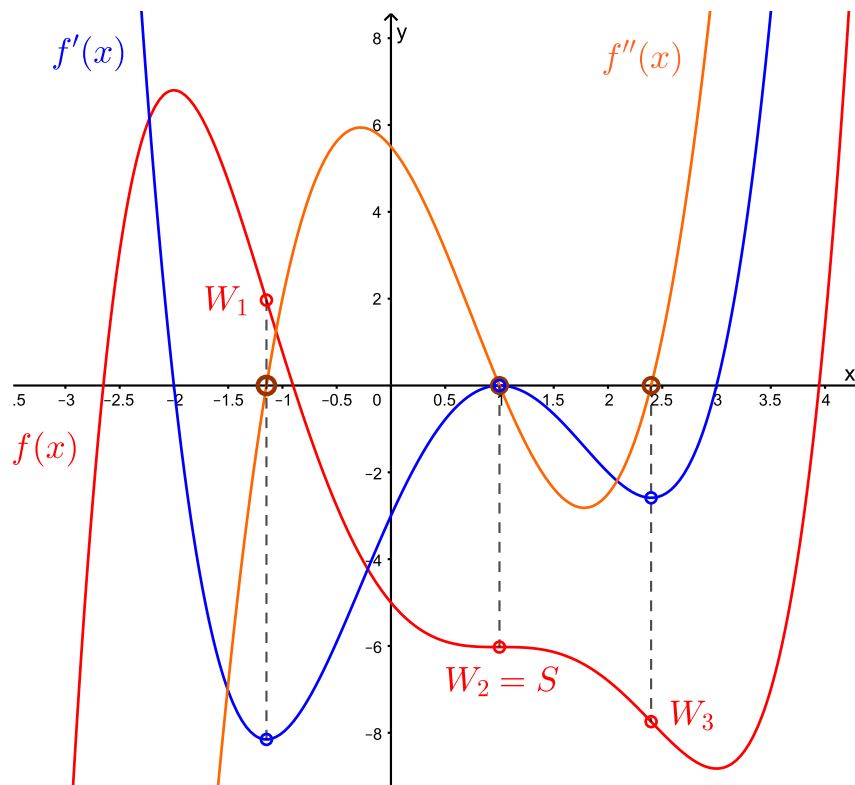
Die Änderung der Steigung macht sich im Funktionsgraphen von $f(x)$ als Krümmung bemerkbar. Diesen Zusammenhang sieht man gut in Abb. 5:

- Ist $f''(x) < 0$, dann fällt die Steigung von $f(x)$ und der Graph ist rechtsgekrümmt.
- Ist $f''(x) > 0$, dann steigt die Steigung von $f(x)$ und der Graph ist linksgekrümmt.
- In den Wendepunkten ändert sich das Krümmungsverhalten des Graphen von $f(x)$: eine Linkskurve geht in eine Rechtskurve über oder umgekehrt.

$$f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{4}x^2 - 3x - 5$$

Abbildung 5: $f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$

$$f''(x) = 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$$



4 Nützliche Folgerungen

1. In einem Extremum der Funktion $f(x)$ ändert sich die Krümmungsrichtung nicht. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn in diesem Punkt die zweite Ableitung entweder positiv oder negativ ist.
2. Sattelpunkte sind spezielle Wendepunkte, nämlich die, mit neutraler Steigung. Die x -Werte der Sattelpunkte sind also Nullstellen der ersten und zweiten Ableitung.
3. Mit 1. hat man jetzt folgendes Kriterium zur Charakterisierung von Extrema:

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann ist $(x_0/f(x_0))$ ein Extremum.

Dabei handelt es sich um ein Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$, und um ein Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$.

4. Da die Wendepunkte die Extrema der Ableitung sind, gilt ganz ähnlich:

Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist $(x_0/f(x_0))$ ein Wendepunkt.

VORSICHT

- Die Punkte 1. bis 3. bedeuten **nicht**, dass Punkte mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ keine Extrema sein können!

Bsp: $f(x) = x^4$ hat an der Stelle $x = 0$ ein Minimum, obwohl $f'(0) = f''(0) = 0$.

- Ebenso bedeutet Punkt 4. **nicht**, dass Punkte mit $f''(x) = 0$ und $f'''(x) = 0$ keine Wendepunkte sein können!

Bsp.: $f(x) = x^5 + x$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt, obwohl $f''(0) = f'''(0) = 0$ ist.