Frank Klinker

Kinematik

Teil 2: Gleichförmige Bewegung und gleichförmig beschleunigte Bewegung

1 Gleichförmige Bewegung

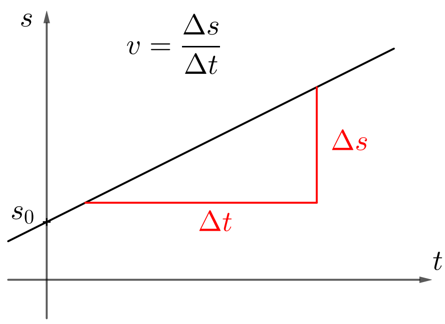
Eine **gleichförmige Bewegung** eines Körpers ist dadurch charakterisiert, dass sie geradlinig verläuft und ihre Geschwindigkeit konstant ist:

$$v = \text{ konstant}\,.$$

Damit ist die Durchschnittsgeschwindigkeit immer gleich groß, unabhängig davon, welche Zeitpunkte man zu ihrer Berechnung heranzieht.

Das Weg-Zeit-Diagramm der gleichförmigen Bewegung hat die Gestalt aus Abbildung 1.

Abbildung 1: Gleichförmige Bewegung



Den grundlegenden Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke ist in Tabelle 1 aufgeführt. Dabei ist zusätzlich:

- t: die Zeit die der Körper unterwegs ist
- s_0: der zu Beginn der Zeitmessung vom Körper bereits zurückgelegte Weg

Tabelle 1: Die Fälle gleichförmiger Bewegung

allgemeiner Fall	Spezialfall: $s_0 = 0$
$s = s_0 + v\,t$	$s = v\,t$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 1. November 2024

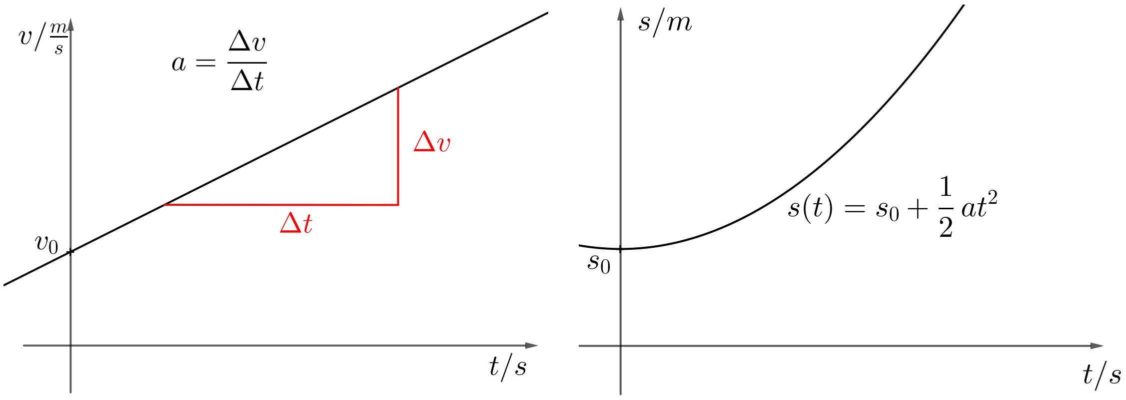
2 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Eine **gleichförmig beschleunigte Bewegung** eines Körpers ist dadurch charakterisiert, dass sie geradlinig verläuft und eine konstante Beschleunigung besitzt:

$$a = \text{ konstant}\,.$$

Damit haben Geschwindigkeit-Zeit- und Weg-Zeit-Diagramm z. B. die Gestalt aus Abbildung 2 (zu den Bezeichnungen siehe unten).

Abbildung 2: gleichförmig beschleunigte Bewegung



Die grundlegenden Zusammenhänge zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke mit Spezialfällen sind in Tabelle 2 aufgeführt. Dabei ist zusätzlich:

- t: die Zeit die der Körper unterwegs ist
- v_0: die Geschwindigkeit, die der Körper zu Beginn der Zeitmessung bereits hat
- s_0: der zu Beginn der Zeitmessung vom Körper bereits zurückgelegte Weg

Tabelle 2: Die Fälle gleichförmig beschleunigter Bewegungen

allgemeiner Fall	Spezialfall: $s_0 = 0$	Spezialfall: $v_0 = 0$	Spezialfall: $s_0 = 0$, $v_0 = 0$
$v = v_0 + a\,t$	$v = v_0 + a\,t$	$v = a\,t$	$v = a\,t$
$s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$	$s = v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$	$s = s_0 + \frac{1}{2}a\,t^2$	$s = \frac{1}{2}a\,t^2$

Bemerkung 1. Eine Beschleunigung $a < 0$ bedeutet bei $v \geq 0$, dass die Geschwindigkeit abnimmt also ein Bremsvorgang vorliegt.

3 Begründung für $s = \frac{1}{2}at^2$ bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung

Wir wissen, dass bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit der zurückgelegte Weg sich gemäß

$$s = v \cdot t\,.$$

berechnet.

Ist $a \neq 0$ aber konstant, so ist v nicht mehr konstant sondern ändert sich gemäß

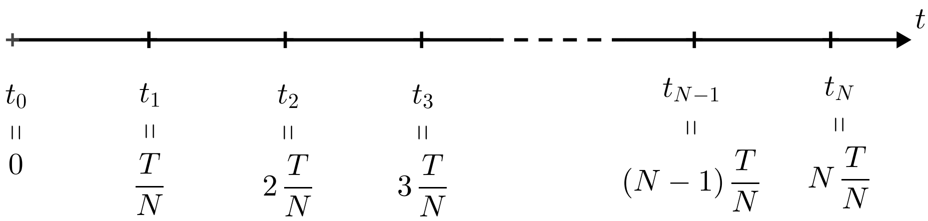
$$v = a \cdot t\,.$$

Damit können wir die vorherige Formel zur Bestimmung des zurückgelegten Wegs nicht mehr nutzen.

Die folgende Überlegung wird uns helfen dennoch eine Formel für die zurückgelegte Strecke zu erhalten: Wenn wir uns nur einen kurze Zeitspanne ansehen, dann wird sich die Geschwindigkeit auch nur wenig ändern. Wir können für kurze Zeiten daher annehmen, dass die Geschwindigkeit konstant ist.

Gesucht ist nun also die zurückgelegte Strecke s nach der Zeit $t = T$. Um kurze Zeitspannen zu bekommen, teilen wir unsere Zeit T in viele kleine Teilzeiten $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_N = T$ (dabei ist N die Anzahl der Teilzeitspannen).

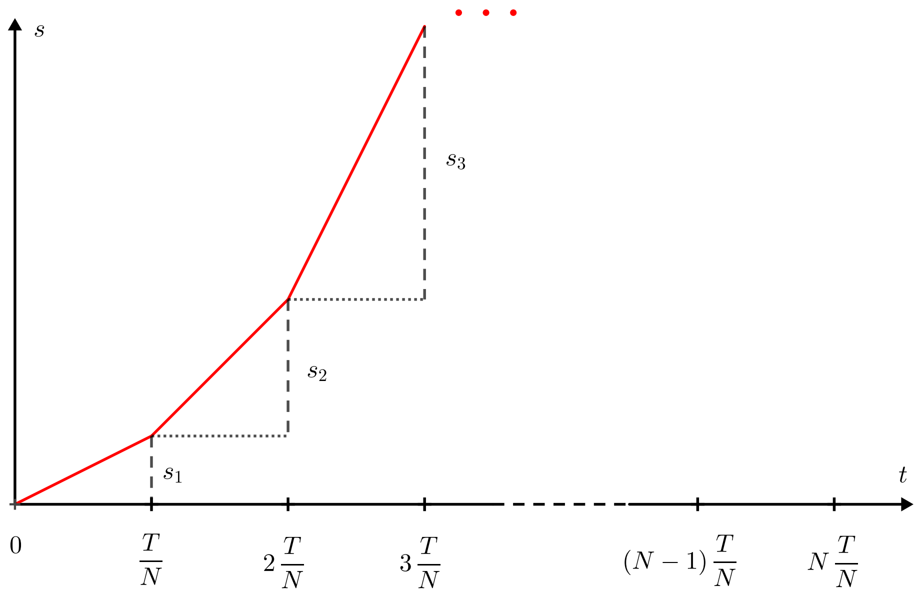
Zusätzlich wählen wir die Abstände zwischen den Teilzeitpunkten alle gleich:



Auf allen kleinen Teilzeitspannen $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ wählen wir als (annähernd) konstante Geschwindigkeit v_k, die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_k, also

$$v_k = a \cdot t_k = a \cdot \left(k\frac{T}{N}\right) = k \cdot a \cdot \frac{T}{N}\,.$$

In der folgenden Grafik ist das zugehörige Weg-Zeit-Diagramm abgebildet. Dabei ist s_k die in der Zeit von t_{k-1} bis t_k zurückgelegte Strecke. Dort ist die Geschwindigkeit jeweils konstant, nämlich v_k. Die benötigte Zeit ist für alle Abschnitte gleich, nämlich $\frac{T}{N}$:



Für die zurückgelegte Teilstrecken ergibt sich ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= v_1 \cdot \frac{T}{N} = 1 \cdot a \cdot \frac{T}{N} \cdot \frac{T}{N} = 1 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 \\
s_2 &= v_2 \cdot \frac{T}{N} = 2 \cdot a \cdot \frac{T}{N} \cdot \frac{T}{N} = 2 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 \\
s_3 &= v_3 \cdot \frac{T}{N} = 3 \cdot a \cdot \frac{T}{N} \cdot \frac{T}{N} = 3 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 \\
&\vdots \\
s_N &= v_N \cdot \frac{T}{N} = N \cdot a \cdot \frac{T}{N} \cdot \frac{T}{N} = N \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2
\end{aligned}
$$

Damit haben wir für die gesamte zurückgelegte Strecke[1]:

$$
\begin{aligned}
s &= s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_N \\
&= 1 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 + 2 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 + 3 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 + \ldots + N \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 \\
&= (1 + 2 + 3 + \ldots + N) \cdot \frac{1}{N^2} \cdot a\,T^2 \\
&= \frac{1}{2}\cancel{N}(N+1) \cdot \frac{1}{N^{\cancel{2}}} \cdot a\,T^2 \\
&= \frac{1}{N}(N+1) \cdot \frac{1}{2}\,a\,T^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{2}\,a\,T^2
\end{aligned}
$$

Zerlegt man die Strecke nun in sehr viele Teilstücke, wählt man also N sehr groß, dann ist $\frac{1}{N}$ sehr klein. Wir erhalten also schließlich

$$\boxed{s = \frac{1}{2} a\,T^2}$$

[1] Wir nutzen die Summenformel $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{1}{2}N(N+1)$.