Frank Klinker

Kinematik

Teil 3: Der freie Fall und die Atwoodsche Fallmaschine

1 Beispiel: Der freie Fall

Der **freie Fall** ist die einfachste und bekannteste gleichförmig beschleunigte Bewegung. Sie ist ein Resultat der Gewichtskraft[1] die für alle Körper nur von seinem Gewicht abhängt und proportional zu diesem ist:

$$\frac{F_G}{m} = g = \text{ konstant}\,.$$

Mit dem zweiten Newtonschen Axiom folgt, dass diese Konstante eine Beschleunigung ist. Sie weist stets in Richtung des Erdmittelpunkts und hat den Wert

$$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\,.$$

Zur Beschreibung des freien Falls gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten:

1. Wir messen von der Oberfläche nach oben. Ist dann h_0 die Höhe aus der wir unseren Probekörper fallen lassen, so gilt für die Höhe $h(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t
$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

2. Legen wir unseren Nullpunkt der Messung in den Punkt, von wo aus der Fall startet, und messen wir in Richtung des Falls, dann gibt
$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$
die Fallstrecke zur Zeit t an.

Welche Beschreibung man nutzt, hängt einerseits von der eigenen Vorliebe ab, kann aber auch von der Art der Fragestellung beeinflusst werden.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 15. November 2024

2 Ausblick: Der freie Fall mit Luftreibung

Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers wird beschrieben durch $v(t) = gt$ und würde dazu führen, dass diese immer weiter steigt.

In der Erdatmosphäre wirkt der Erdbeschleunigung jedoch eine mit steigender Geschwindigkeit abbremsende Beschleunigung entgegen. Diese ist ein Resultat der Luftreibungskraft F_R und wir unterscheiden dabei zwei Arten:

- Ist die Geschwindigkeit v klein, so ist $F_{R,S} = \gamma v$. Die Reibungskraft ist also proportional zur Geschwindigkeit[2]. Die Proportionalitätskonstante γ hängt von der Geometrie des Körpers, aber nicht von seiner Masse ab.
- Ist die Geschwindigkeit v groß, so ist $F_{R,N} = \eta v^2$. Nun ist die Reibungskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, also wesentlich größer als im ersten Fall[3]. Auch hier hängt die Konstante η nicht von der Masse, sondern nur von der Geometrie des Körpers ab.

In beiden Fällen führt die immer stärker werdende Bremsung dazu, dass der fallende Körper irgendwann nicht mehr schneller wird, es stellt sich eine "Grenzgeschwindigkeit" ein. Diese kann man berechnen und sie ergibt sich in den beiden diskutierten Fällen zu

$$v_{\text{grenz},S} = \frac{mg}{\gamma} \qquad \text{oder} \qquad v_{\text{grenz},N} = \sqrt{\frac{mg}{\eta}}\,.$$

Beispiel 1. Für einen Menschen, der mit ausgestreckten Armen quer zur Fallrichtung ausgerichtet ist, nimmt man Newton-Reibung mit einer Konstanten $\eta \approx 0{,}25\,\frac{kg}{m}$ an. Damit ergibt sich für einen $m = 75\,kg$ schweren Fallschirmspringer eine Grenzgeschwindigkeit von etwa

$$v_{\text{grenz},N} \approx \sqrt{\frac{75 \cdot 9{,}81}{0{,}25}}\,\frac{m}{s} \approx 54\,\frac{m}{s} \approx 195\,\frac{km}{h}\,.$$

Bemerkung 2. Im Gegensatz zum freien Fall ohne Reibung hängt beim freien Fall mit Luftreibung die Fallbewegung des Körpers auch von seiner Masse ab. Das ist eine Tatsache, die der Alltagserfahrung vermutlich eher entspricht.

3 Beispiel: Die Atwoodsche Fallmaschine

Die Weg-Zeit-Messungen beim Versuch zum freien Fall im Labor sind wegen der großen Erdbeschleunigung etwas schwierig. Wünschenswert wäre daher eine Bewegung mit kleiner konstanter Beschleunigung.

Ein Versuch dazu wird durch die **Atwoodsche Fallmaschine**[4] realisiert. Bei ihr wird ein Seil über eine Rolle geführt und an beiden Enden werden Gewichte gehängt,

[2] Dieser Fall heißt Stokes-Reibung (George Gabriel Stokes, 1819-1903).
[3] Dieser Fall heißt Newton-Reibung (Isaac Newton, 1642-1726).
[4] George Atwood, 1745-1807

hier M und $M+m$. Dann wirkt auf die Seite mit dem größeren Gewicht eine abwärts gerichtete resultierende Kraft $F_{\text{res}} = mg$, siehe dazu auch die Abbildung unten.

Dies ist nun die Kraft, welche das System, das aus $M_1 = M$ und $M_2 = M + m$ besteht, beschleunigt. Damit gilt wegen des zweiten Newtonschen Axioms

$$F_{\text{res}} = (M_1 + M_2)a = (2M + m)a\,.$$

Mit dem Wert für F_{res} von oben ist das

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \cdot g = \frac{m}{2M + m} \cdot g\,.$$

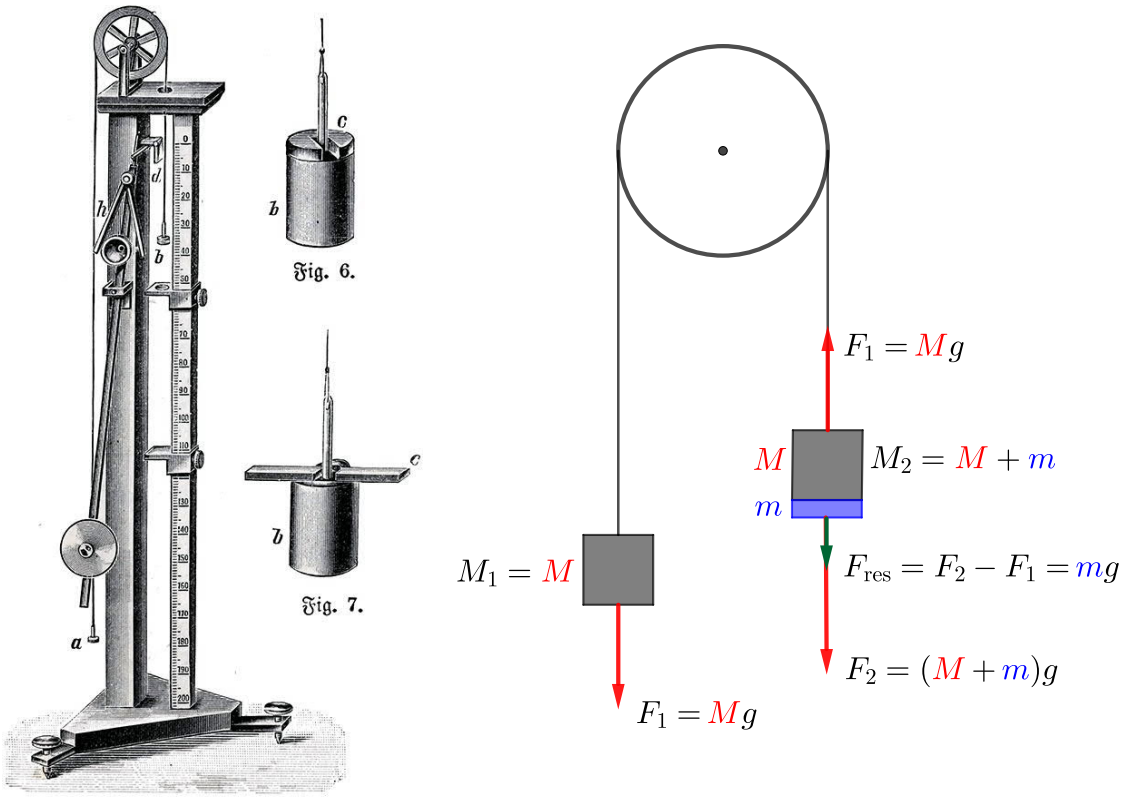

Fig. 5.
Atwoodsche Fallmaschine

Bemerkung 3.

1. Ist $m = 0$ (also $M_1 = M_2$), so ist $a = 0$, und das System ist im Gleichgewicht.
2. Wählt man $m = M$ (also $M_2 = 2M_1$), so ist $a = \frac{1}{3}g$.
3. Ist $m \gg M$ (also $M_2 \gg M_1$), dann ist $\frac{M}{m} \approx 0$. Für die Beschleunigung bedeutet das $a = \frac{m}{2M+m} \cdot g = \frac{1}{2\frac{M}{m}+1} \cdot g \approx \frac{1}{0+1} \cdot g = g$.
4. Ist die Beschleunigung a bekannt, dann verhalten sich die Massen einer Atwoodschen Fallmaschine wie

$$m = \frac{2a}{g-a}\,M \quad \text{oder} \quad M_2 = \frac{g+a}{g-a}M_1\,.$$

5. Soll die Beschleunigung a genau $p\%$ der Erdbeschleunigung sein, so muss die Masse m entsprechend $\frac{200p}{100-p}\%$ der Masse M gewählt werden, also

$$m = \frac{2p}{100-p}M \quad \text{oder} \quad M_2 = \frac{100+p}{100-p}M_1$$

Für $p = 33{,}\bar{3}\%$ der Erdbeschleunigung bräuchte man also 100%, d. h. $m = M$ (oder $M_2 = 2M_1$), siehe 2.