Frank Klinker

Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 2: Geraden im Raum

1 Die Parameterdarstellung einer Geraden

Wir erinnern uns, wie wir Geraden in der Ebene festgelegt haben:

(i) Eine Gerade ist durch die Angabe eines Punktes und einer Richtung festgelegt

(ii) Eine Gerade ist durch die Angabe von zwei Punkten festgelegt

Wir beginnen mit der Variante (i). Wir nutzen, dass wir Richtungen im Raum durch Vektoren beschreiben. Wir nehmen als o an, dass die Gearde durch den Punkt A und die Richtung $\vec{v}$ definiert ist.

Den Aufpunktvektor $\overrightarrow{0P}$ eines beliebigen Punktes P der Geraden erhalten wir nun, indem wir

1. vom Ursprung mit Hilfe des Aufpunktvektors $\overrightarrow{0A}$ zum gegebenen Punkt A gehen und dann
2. ein festes Stück in Richtung $\vec{v}$ gehen, bis wir den Punkt P erreicht haben.

   Den zugehörigen Vektor, der uns von A zu P bringt, erhalten wir, indem wir $\vec{v}$ mit einer geeigneten Zahl t multiplizieren.

Zusammengefasst haben wir also

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0A} + t\vec{v}\,.$$

Ändern wir die Zahl t, dann erreichen wir einen anderen Punkt der Geraden.

Das ist auch bereits eine Beschreibung der Geraden, die uns interessiert:

Parameterdarstellung einer Geraden

Eine Gerade $\mathfrak{g}$, die durch einen Punkt A und eine Richtung $\vec{v}$ gegeben ist, besitzt die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{0A} + t\vec{v}\,.$$

Dabei erlaubt der Parameter t, dass wir alle Punkte der Geraden erreichen, indem wir ihn variieren.

$\overrightarrow{0A}$ heißt **Aufpunktvektor** oder **Stützvektor** und $\vec{v}$ heißt **Richtungsvektor** der Geraden.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 7. Oktober 2024

Beispiel 1. Die Gerade $\mathfrak{g}$ ist durch den Punkt $A(1/{-3}/6)$ und die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ geben. Dann ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Für $t = 10$ haben wir etwa

$$\vec{x}(10) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 10 \cdot 2 \\ -3 + 10 \cdot 4 \\ 6 + 10 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 37 \\ -24 \end{pmatrix} ,$$

sodass der Punkt $(21/37/{-23})$ auf der Geraden liegt.
Für $t = -\frac{1}{2}$ ist

$$\vec{x}(-\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \Big(-\frac{1}{2} \Big) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \\ -3 - \frac{1}{2} \cdot 4 \\ 6 - \frac{1}{2} \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} ,$$

sodass der Punkt $\big(0/-5/\frac{15}{2}\big)$ auf der Geraden liegt.

Wenden wir uns der Situation (ii) zu, in der eine Gerade $\mathfrak{g}$ durch zwei Punkte A und B gegeben ist. Diesen Fall führt man sehr einfach auf den Fall (i) zurück:

> Ist eine Gerade durch zwei Punkte gegeben, dann wählt man einen der beiden Punkte als Aufpunkt der Geraden aus und als Richtungsvektor nutzt man den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der beiden gegebenen Punkte, also
>
> $$\vec{x}(t) = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB} .$$

Beispiel 2. Die Gerade $\mathfrak{k}$ ist durch die Punkte $A(5/3/{-4})$ und $B(-4/4/{-9})$ gegeben. Wir wählen als Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 - 5 \\ 4 - 3 \\ -9 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Damit ist eine Parameterdarstellung der Gerade durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bemerkung 3. In der obigen Konstruktion sieht man bereits, dass eine Parameterform einer Geraden nicht eindeutig ist. Einerseits kann man jeden beliebigen Punkt der Geraden als Aufpunkt wählen, andererseits ist der Richtungsvektor nur bis auf ein Vielfaches festgelegt.

Allerdings ist es nicht so schwierig herauszufinden, ob zwei verschiedene Parameterdarstellungen die selbe Gerade beschreiben, siehe Abschnitt 3.1.

2 Liegt ein Punkt auf einer Geraden?

Um zu überprüfen, ob ein Punkt Q auf einer Geraden liegt, sollte diese Gerade in Parameterdarstellung vorliegen, also

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{0A} + t\vec{v}\,.$$

Der Punkt Q liegt genau dann auf der Geraden, wenn wir einen Parameterwert t_0 finden, so dass

$$\overrightarrow{0Q} = \overrightarrow{0A} + t_0\vec{v}$$

gilt. Wir machen das an einem Beispiel:

Beispiel 4. Die Gerade ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Liegt der Punkt $Q_1(-4/-3/2)$ auf der Geraden $\mathfrak{g}$?

Dazu suchen wir einen Parameterwert t, sodass

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben das komponentenweise und erhalten

$$\begin{array}{rll}
-4 & = 2 + t \cdot 2 & \\
-3 & = 0 + t \cdot 1 & \\
2 & = -1 + t \cdot (-1) & \\
\hline
-4 & = 2 + 2t & \mid -2 \\
-3 & = t & \\
2 & = -1 - t & \mid +1 \\
\hline
-6 & = 2t & \mid :2 \\
-3 & = t & \\
3 & = -t & \mid :(-1) \\
\hline
-3 & = t & \\
-3 & = t & \\
-3 & = t &
\end{array}$$

Als Ergebnis erhalten wir: Der Punkt Q_1 liegt auf der Geraden, weil es diesen Parameterwert gibt, nämlich $t = -3$.

b) Liegt der Punkt $Q_2(10/4/-4)$ auf der Geraden $\mathfrak{g}$?

Auch hier suchen wir dazu einen Parameterwert t, sodass

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben auch das komponentenweise und erhalten

$$
\begin{array}{rll}
10 & = 2 + t \cdot 2 & \\
4 & = 0 + t \cdot 1 & \\
-4 & = -1 + t \cdot (-1) & \\
\hline
10 & = 2 + 2t & \mid -2 \\
4 & = t & \\
-4 & = -1 - t & \mid +1 \\
\hline
8 & = 2t & \mid :2 \\
4 & = t & \\
-3 & = -t & \mid :(-1) \\
\hline
4 & = t & \\
4 & = t & \\
3 & = t &
\end{array}
$$

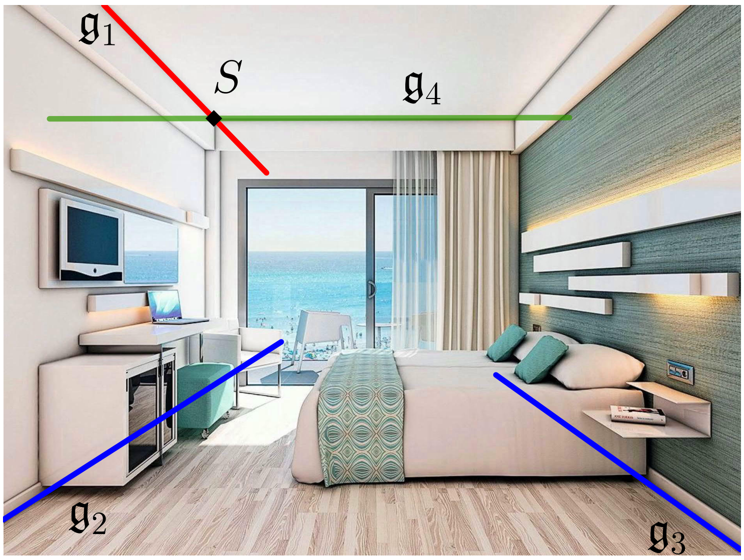
Als Ergebnis erhalten wir hier: Der Punkt Q_2 liegt nicht auf der Geraden, weil es diesen Parameterwert nicht gibt (er müsste bei allen drei Komponenten der gleiche sein!)

3 Lagebeziehung zweier Geraden

Haben wir zwei Geraden gegeben, dann können wir uns fragen, ob sich diese schneiden und, wenn ja, in welchem Punkt.

Für zwei Geraden in der Ebene hatten wir gesehen, dass sich zwei verschiedene Geraden genau dann schneiden, wenn sie in unterschiedliche Richtungen verlaufen.[1]

Im Raum ist des etwas komplizierter. Hier können sich zwei Geraden auch dann nicht schneiden, wenn sie in verschiedene Richtungen zeigen. Wir sehen uns dass mal an den Kanten eines Zimmers an, die ja jeweils Geraden definieren.



[1] Zur Erinnerung: In der Ebene haben wir die Richtung durch die Steigung der Geraden beschrieben.

In diesem Zimmer gilt:

- Die rote Gerade $\mathfrak{g}_1$ und die beiden blauen Geraden $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_3$ sind alle parallel, sie haben die gleiche Richtung.
- Die rote Gerade $\mathfrak{g}_1$ und die grüne Gerade $\mathfrak{g}_4$ haben unterschiedliche Richtungen und schneiden sich in einem Punkt S.
- Die grüne Gerade $\mathfrak{g}_4$ schneidet die beiden blauen Geraden $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_3$ nicht, obwohl sie verschiedene Richtungen haben.

Geraden, die sich nicht schneiden, aber in verschiedene Richtungen zeigen, heißen **windschief**.

3.1 Geraden mit gleicher Richtung

Wenn Geraden in Parameterdarstellung vorliegen, dann kann man sehr einfach sehen, ob zwei Geraden in die gleiche Richtung weisen oder nicht. Dazu muss man sich nur die Richtungsvektoren ansehen:

Geraden mit gleicher Richtung

Zwei Geraden die in Parameterform gegeben sind, verlaufen in die gleiche Richtung, wenn ihre beiden Richtungsvektoren kollinear sind, vergleiche auch Beispiel 9 in Teil 1.

Beispiel 5. Die Geraden $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}25\\12{,}5\\50\end{pmatrix}$ zeigen in die gleiche Richtung, denn die Richtungsvektoren sind kollinear.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} = \frac{2}{25}\cdot\begin{pmatrix}25\\12{,}5\\50\end{pmatrix} \quad \text{oder umgekehrt} \quad \begin{pmatrix}25\\12{,}5\\50\end{pmatrix} = 12{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}.$$

Die Geraden $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}25\\12\\50\end{pmatrix}$ zeigen nicht in die gleiche Richtung, denn die beiden Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

Bemerkung 6. Vorsicht: Zeigen zwei Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ in die gleiche Richtung, dann sind sie nicht unbedingt parallel, sondern sie können auch identisch sein.

Um das zu entscheiden muss man lediglich testen, ob der Aufpunkt der einen Geraden auf der anderen liegt, siehe dazu auch Beispiel 4:

- Liegt der Aufpunkt von $\mathfrak{g}_1$ <u>nicht</u> auf $\mathfrak{g}_2$, dann sind die beiden Geraden parallel.
- Liegt der Aufpunkt von $\mathfrak{g}_1$ auf $\mathfrak{g}_2$, dann sind die beiden Geraden identisch.

3.2 Geraden mit unterschiedlichen Richtungen

In diesem Fall haben wir in dem einleitenden Beispiel mit dem Zimmer bereits gesehen, dass zwei Situationen vorliegen können, nämlich

- die Geraden haben einen Schnittpunkt oder
- die Geraden sind windschief.

Glücklicherweise können wir die Entscheidung treffen, indem wir eine einzige Rechnung durchführen. Wir versuchen den Schnittpunkt zu berechnen: entweder wir erhalten einen oder nicht.

Wir setzen wieder voraus, dass die zwei Geraden in Parameterdarstellung gegeben sind

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{0A} + t\vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{x}(t) = \overrightarrow{0B} + t\vec{w}\,.$$

Wenn nun ein Schnittpunkt S der beiden Geraden vorliegt, dann gibt es zwei Parameterwerte t_0 und s_0, so dass

$$\overrightarrow{0S} = \overrightarrow{0A} + t_0\vec{v} \quad \underline{\text{und}} \quad \overrightarrow{0S} = \overrightarrow{0B} + s_0\vec{w}\,.$$

Wenn wir nicht wissen, ob ein Schnittpunkt existiert, dann versuchen wir diesen zu berechnen, indem wir solche zwei Parameterwerte bestimmen. D. h. wir lösen

$$\overrightarrow{0A} + t\vec{v} = \overrightarrow{0B} + s\vec{w}\,.$$

Dann folgt:

- die Geraden haben einen Schnittpunkt, wenn es Lösungen für die Parameter gibt, und
- die Geraden sind windschief, wenn es keine Lösungen gibt.

Wir machen das anhand von Beispielen:

Beispiel 7. Wir starten mit zwei Geraden $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Um entscheiden zu können ob es einen Schnittpunkt gibt, müssen wir

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lösen.

Wir sehen uns das wieder komponentenweise an:

$$\begin{array}{lrll}
 & 5+t\cdot(-9) & =10+s\cdot 4 & \\
 & 3+t\cdot 1 & =1+s\cdot 1 & \\
 & -4+t\cdot(-5) & =-1+s\cdot 2 & \\
\hline
 & 5-9t & =10+4s & |-4s|-5 \\
 & 3+t & =1+s & |-s\,|-3 \\
 & -4-5t & =-1+2s & |-2s|+4 \\
\hline
 & -9t-4s & =5 & \\
 & t-s & =-2 & \\
 & -5t-2s & =3 & \\
\hline
I+9\cdot II & -13s & =-13 & |:(-13) \\
II & t-s & =-2 & | \\
III+5\cdot II & -7s & =-7 & |:(-7) \\
\hline
 & s & =1 & \\
 & t-s & =-2 & |s=1 \text{ einsetzen} \\
 & s & =1 & |\text{überflüssig} \\
\hline
 & s & =1 & \\
 & t-1 & =-2 & |+1 \\
\hline
 & s & =1 & \\
 & t & =-1 &
\end{array}$$

Es gibt also eine Lösung, nämlich $t=-1$ und $s=1$.

Um den Schnittpunkt zu berechnen, müssen wir nur noch einsetzen:[2]

$$\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-9\\1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+9\\3-1\\-4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\\1\end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix}10\\1\\-1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+4\\1+1\\-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Beide liefern das gleiche Ergebnis, nämlich den gesuchten Schnittpunkt $S(14/2/1)$.

Beispiel 8. Wir starten mit zwei Geraden $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-22\end{pmatrix}$.

Für die Entscheidung, ob es einen Schnittpunkt gibt, müssen wir

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

[2] Dazu müssen wir genau darauf achten, welcher Parameter zu welcher Geraden gehört!

lösen.

Auch hier sehen wir uns das wieder komponentenweise an:

$$
\begin{array}{llll}
 & 2+t\cdot 1 & =1+s\cdot 2 & \\
 & 0+t\cdot 2 & =1+s\cdot 2 & \\
 & -1+t\cdot 1 & =-3+s\cdot(-2) & \\
\hline
 & 2+t & =1+2s & |-2s|-2 \\
 & 2t & =1+2s & |-2s \\
 & -1+t & =-3-2s & |+2s|+1 \\
\hline
 & t-2s & =-1 & \\
 & 2t-2s & =1 & \\
 & t+2s & =-2 & \\
\hline
I+III & 2t & =-3 & |:2 \\
II+III & 3t & =-1 & |:3 \\
III & t+2s & =-2 & \\
\hline
 & t & =-1,5 & \\
 & t & =-0,\overline{3} & \\
 & t+2s & =-2 &
\end{array}
$$

Hier erhalten wir aus den ersten zwei Gleichungen zwei verschiedene Werte für t. Damit können wir bereits an dieser Stelle sagen, dass es keine Lösung der Gleichung gibt. Damit gibt es auch keinen Schnittpunkt und die beiden Geraden sind windschief.