Frank Klinker

Grundlagen der analytischen Geometrie

Teil 4: Koordinatenachsen, Koordinatenebenen, Spurpunkte und Spurgeraden

1 Die Koordinatenachsen und die Koordinatenebenen

Die Koordinatenachsen sind Geraden. Die Punkte, die auf einer Koordinatenachse liegen kann man auf zwei Arten beschreiben:

- Die ***x*-Achse** enthält alle Punkte deren y- und z-Komponenten Null sind:

$$\big\{(a/0/0)\ \big|\ a \text{ eine beliebige Zahl}\big\}$$

  Als Gerade verläuft die x-Achse durch den Punkt $(0/0/0)$ und hat die Richtung $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$:

$$\vec{x}(t) = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Analog erhält man für die y-Achse und die z-Achse:

- Die ***y*-Achse**:

$$\big\{(0/b/0)\ \big|\ b \text{ eine beliebige Zahl}\big\}$$

$$\vec{x}(t) = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

- Die ***z*-Achse**:

$$\big\{(0/0/c)\ \big|\ c \text{ eine beliebige Zahl}\big\}$$

$$\vec{x}(t) = t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Die Koordinatenebenen sind Ebenen. Die Punkte, die auf einer Koordinatenebene liegen kann man auf zwei Arten beschreiben:

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 1. September 2023

- Die ***xy*-Ebene** enthält alle Punkte deren z-Komponente Null ist:

  $$\big\{(a/b/0) \bigm| a, b \text{ beliebige Zahlen}\big\}$$

  Als Ebene verläuft die xy-Ebene durch den Punkt $(0/0/0)$ und hat die Richtungsvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (die Richtungen der x- und der y-Achse):

  $$\vec{x}(t,s) = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Analog erhält man für die xz-Ebene und die yz-Ebene:

- Die ***xz*-Ebene**:

  $$\big\{(a/0/c) \bigm| a, c \text{ beliebige Zahlen}\big\}$$
  $$\vec{x}(t,s) = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- Die ***yz*-Ebene**:

  $$\big\{(0/b/c) \bigm| b, c \text{ beliebige Zahlen}\big\}$$
  $$\vec{x}(t,s) = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2 Die Schnitte einer Geraden mit den Koordinatenebenen

Eine typische Gerade schneidet alle Koordinatenebenen. Die zugehörigen Punkte nennt man auch die **Spurpunkte der Gerade**.

Wenn eine Gerade eine Koordinatenebene nicht schneidet, dann bedeutet das, dass sie parallel zu dieser ist.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Spurpunkte einer Geraden ist stets ähnlich. Wir führen die Berechnung der Spurpunkte an zwei Beispielen durch:

Beispiel 1. Die Spurpunkte der Geraden $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$:

- Der Spurpunkt in der xy-Ebene hat die Eigenschaft, dass seine z-Komponente Null sein muss. Deshalb setzen wir die z-Komponente der Geraden gleich Null und bestimmen den zugehörigen Parameter t:

  $$0 = 3 + 2t \iff t = -1{,}5$$

Diesen setzen wir nun in $\vec{x}(t)$ ein und erhalten den Ortsvektor des gesuchten Spurpunktes:

$$\vec{x}(-1{,}5) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1{,}5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt ist also $(1/-0{,}5/0)$.

- Für den Spurpunkt in der xz-Ebene muss die y-Komponente Null sein. Deshalb setzen wir jetzt die y-Komponente der Geraden gleich Null und setzen den erhaltenen Parameter t in $\vec{x}(t)$ ein:

$$0 = 1 + t \iff t = -1$$

$$\vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt ist also $(2/0/1)$.

- Analog setzten wir für den Spurpunkt in der yz-Ebene die x-Komponente der Geraden gleich Null und berechnen mit dem erhaltenen Parameter schließlich den Spurpunkt:

$$0 = 4 + 2t \iff t = -2$$

$$\vec{x}(-2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt ist also $(0/-1/-1)$.

Beispiel 2. Die Spurpunkte der Geraden $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$:

- Der Spurpunkt in der xy-Ebene (z-Komponente Null setzen):

$$0 = -8 - 2t \iff t = -4$$

$$\vec{x}(-4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt in der xy-Ebene ist also $(-2/16/0)$.

- Der Spurpunkt in der xz-Ebene (y-Komponente Null setzen):

$$0 = 4 - 3t \iff t = \frac{4}{3}$$

$$\vec{x}\big(-\tfrac{4}{3}\big) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt in der xz-Ebene ist also $\big(-2/0/-\frac{16}{3}\big)$.

- Der Spurpunkt in der yz-Ebene (x-Komponente Null setzen):

$$0 = -2$$

Das besitzt keine Lösung, also gibt es diesen Spurpunkt nicht und die Gerade ist parallel zur yz-Ebene.

3 Die Schnitte einer Ebene mit den Koordinatenachsen

Eine typische Ebene schneidet alle Koordinatenachsen. Die zugehörigen Punkte nennt man auch die **Spurpunkte der Ebene**.

Wenn eine Ebene eine Koordinatenachse nicht schneidet, dann bedeutet das, dass sie parallel zu dieser ist.

Auch das Vorgehen zur Bestimmung der Spurpunkte einer Ebene ist immer ähnlich. Wir führen die Berechnung der Spurpunkte an zwei Beispielen durch:

Beispiel 3. Die Spurpunkte der Ebene $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$:

- Der Spurpunkt mit der x-Achse hat die Eigenschaft, dass die y-Komponente und die z-Komponente Null sein muss. Deshalb setzen wir die y- und die z-Komponente der Ebene gleich Null und bestimmen die zugehörigen Parameter t, s:

$$\left.\begin{matrix} 0 = 1 + t - s \\ 0 = 2 + t + 4s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -1 = t - s \\ -2 = t + 4s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -1 = t - s \\ -1 = 5s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -1{,}2 = t \\ -0{,}2 = s \end{matrix}\right.$$

Diese setzen wir nun in $\vec{x}(t,s)$ ein und erhalten den Ortsvektor des gesuchten Spurpunktes:

$$\vec{x}(-1{,}2; -0{,}2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1{,}2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt mit der x-Achse ist also $(1{,}8/0/0)$.

- Für den Spurpunkt mit der y-Achse müssen die x- und z-Komponenten Null sein. Deshalb setzen wir jetzt diese beiden Komponenten der Ebene gleich Null und setzen die erhaltenen Parameter t, s in $\vec{x}(t,s)$ ein:

$$\left.\begin{matrix} 0 = 4 + 2t - s \\ 0 = 2 + t + 4s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -4 = 2t - s \\ -4 = 2t + 8s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -4 = 2t - s \\ 0 = 9s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -2 = t \\ 0 = s \end{matrix}\right.$$

$$\vec{x}(-2; 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt mit der y-Achse ist also $(0/-1/0)$.

- Analog setzten wir für den Spurpunkt mit der z-Achse die x- und y-Komponente der Ebene gleich Null und berechnen mit dem erhaltenen Parameter schließlich den Spurpunkt: $\vec{x}(t,s)$ ein:

$$\left.\begin{matrix} 0 = 4 + 2t - s \\ 0 = 1 + t - s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -4 = 2t - s \\ -1 = t - s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -4 = 2t - s \\ -3 = t \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -2 = s \\ -3 = t \end{matrix}\right.$$

$$\vec{x}(-3;-2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt mit der z-Achse ist also $(0/0/3)$.

Beispiel 4. Die Spurpunkte der Ebene $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$:

- Der Spurpunkt mit der x-Achse (y- und z-Komponente Null setzten)

$$\left.\begin{matrix} 0 = 2 + t + 2s \\ 0 = -2 + t - 2s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -2 = t + 2s \\ 2 = t - 2s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -2 = t + 2s \\ -4 = 4s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} 0 = t \\ -1 = s \end{matrix}\right.$$

$$\vec{x}(0;-1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt mit der x-Achse ist also $(2/0/0)$.

- Der Spurpunkt mit der y-Achse (x- und z-Komponente Null setzten)

$$\left.\begin{matrix} 0 = 6 + 2t + 4s \\ 0 = -2 + t - 2s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -3 = t + 2s \\ 2 = t - 2s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -3 = t + 2s \\ -1 = 2t \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -1{,}25 = s \\ -0{,}5 = t \end{matrix}\right.$$

$$\vec{x}(-0{,}5;-1{,}25) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 0{,}5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1{,}25\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt mit der y-Achse ist also $(0/-1/0)$.

- Der Spurpunkt mit der z-Achse (x- und y-Komponente Null setzten)

$$\left.\begin{matrix} 0 = 6 + 2t + 4s \\ 0 = 2 + t + 2s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -3 = t + 2s \\ 2 = t + 2s \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -2 = t + 2s \\ 5 = 0 \end{matrix}\right.$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung. Deshalb gibt es diesen Spurpunkt nicht und die Ebene liegt parallel zur z-Achse.

4 Die Schnitte einer Ebene mit den Koordinatenebenen

Eine typische Ebene schneidet alle Koordinatenebenen. Die zugehörigen Schnitte sind Geraden und mann nennt sie die **Spurgeraden der Ebene**.

Wenn eine Ebene eine Koordinatenebene nicht schneidet, dann bedeutet das, dass sie parallel zu dieser ist.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Spurgeraden einer Ebene ist immer ähnlich. Deshalb führen die wir die Berechnung auch hier an zwei Beispielen durch:

Beispiel 5. Die Spurgeraden der Ebene $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$:

- Die Spurgerade in der xy-Ebene hat die Eigenschaft, dass die z-Komponente Null sein muss. Deshalb setzen wir die z-Komponente der Ebene gleich Null und bestimmen eine Abhängigkeit der Parameter t und s:

  $$0 = 2 + t + 4s \iff t = -2 - 4s$$

  Diese Beziehung setzen wir nun für t in $\vec{x}(t,s)$ ein und erhalten die Parameterform der gesuchten Spurgeraden:

  $$\vec{x}(-2-4s;s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2-4s) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Eine Parameterform der Spurgeraden in der xy-Ebene ist damit

  $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Für die Spurgerade in der xz-Ebene muss die y-Komponenten Null sein. Deshalb setzen wir jetzt diese Komponente der Ebene gleich Null und setzen die erhaltenen Beziehung zwischen den Parametern t und s in $\vec{x}(t,s)$ ein:

  $$0 = 1 + t - s \iff s = 1 + t$$

  $$\vec{x}(t;1+t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1+t) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

  Eine Parameterform der Spurgeraden mit der xz-Ebene ist

  $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

  .

- Analog setzten wir für die Spurgeraden mit der yz-Ebene die x-Komponente der Ebene gleich Null und berechnen mit dem erhaltenen Beziehung schließlich die Spurgerade $\vec{x}(t,s)$ ein:

  $$0 = 4 + 2t - s \iff s = 4 + 2t$$

  $$\vec{x}(t;4+2t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (4+2t) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

  Eine Parameterform der Spurgeraden mit der yz-Ebene ist

  $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

  .

Beispiel 6. Die Spurgeraden der Ebene $\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Spurgerade in der xy-Ebene (z-Komponente Null setzen)

$$0 = 4 - 2t + 2s \iff t = 2 + s$$

$$\vec{x}(2+s;s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + (2+s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Eine Parameterform der Spurgeraden in der xy-Ebene ist damit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Die Spurgerade in der xz-Ebene (y-Komponente Null setzen)

$$0 = -3 + t + 2s \iff t = 3 - 2s$$

$$\vec{x}(2+s;s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + (3-2s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

  Eine Parameterform der Spurgeraden in der xy-Ebene ist damit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Die Spurgerade in der yz-Ebene (x-Komponente Null setzen)

$$0 = 2$$

  Diese Gleichung ist nicht lösbar. Das heißt, die gesuchte Spurgerade existiert nicht und unsere Ausgangsebene ist parallel zur yz-Ebene.