Frank Klinker

Geraden und lineare Funktionen

Teil 1: Die Steigung und die Geradengleichung einer Geraden

1 Wie beschreiben wir Geraden?

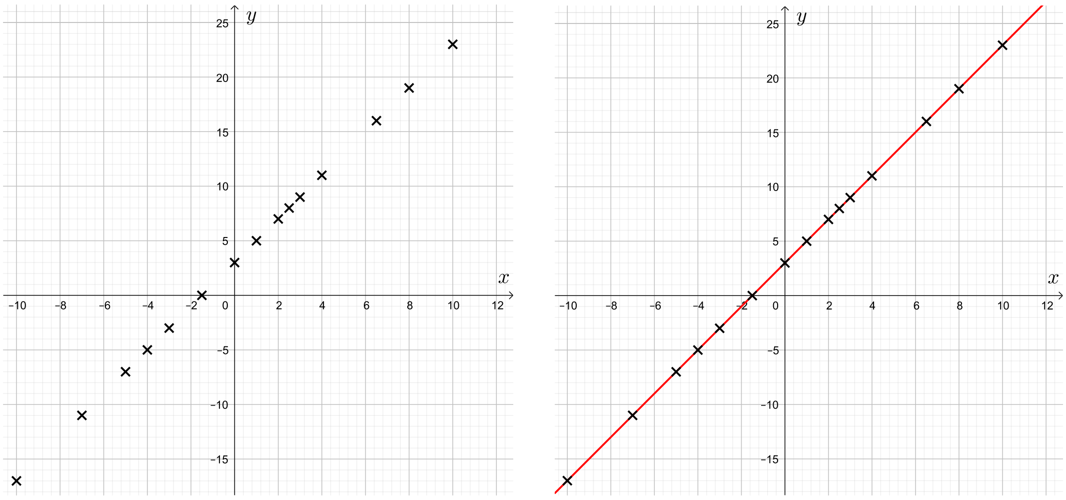
1.1 Die Darstellung von Messreihen im Koordinatensystem

Wir haben Messwerte aus Versuchen oder Werte aus Preislisten in Koordinatensysteme übertragen.

Dabei haben wir gesehen, dass sich die Punkte oft auf sehr einfache Weise miteinander verbinden ließen: alle Punkte lagen auf einer Geraden.

Das sah dann etwa so aus wie in Abbildung 1.

Abbildung 1: Messwerte liegen auf einer Geraden



1.2 Wie wir Geraden eindeutig beschreiben können

Wir haben gesehen und uns darauf geeinigt, dass wir Geraden im Wesentlichen auf zwei verschiedene Arten beschreiben können:

1. Durch die Angabe von **zwei Punkten** ist eine Gerade festgelegt.

Punkt 1 ist geometrisch schnell klar. Wir wissen aber auch, dass ein Punkt allein nicht ausreicht, um eine Gerade zu beschreiben.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 1. Mai 2024

Haben wir jedoch nur einen Punkt, dann bräuchten wir zur Beschreibung einer Geraden noch die Richtung, in die sie verläuft, also:

2. Durch die Angabe **eines Punktes und der Richtung** ist eine Gerade festgelegt.

Als sehr einfacher Punkt hat sich der Schnittpunkt mit der y-Achse herausgestellt. Diesen ***y*-Achsenabschnitt** haben wir mit b bezeichnet.

2*. Durch die Angabe **des *y*-Achsenabschnitts und der Richtung** ist eine Gerade festgelegt.

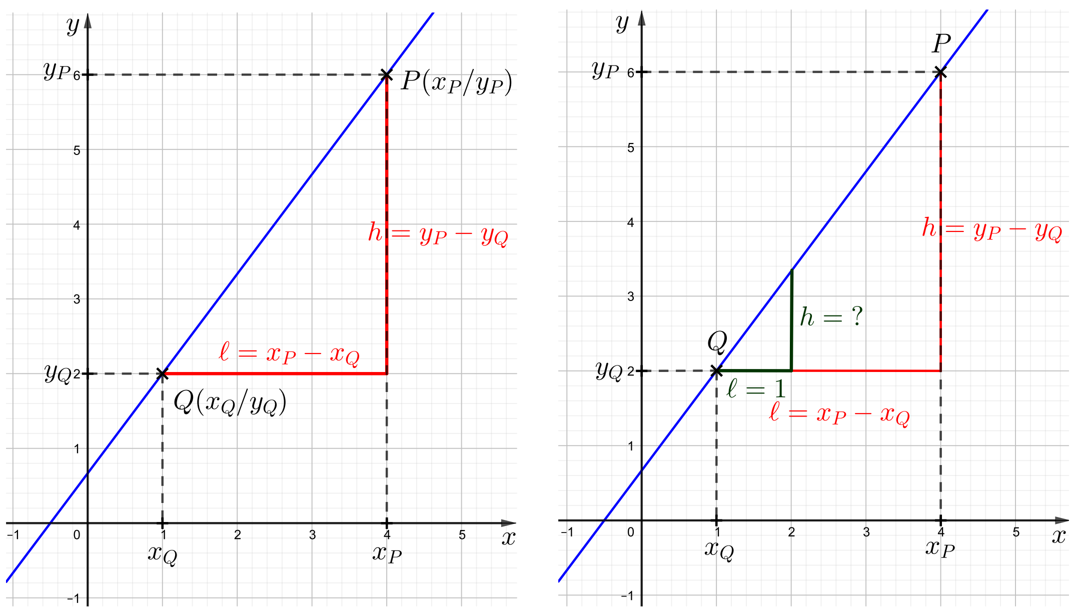
Während wir x- und y-Koordinaten eines Punktes oder den y-Achsenabschnitt oft genau, aber meistens mindestens näherungsweise ablesen können, haben wir keine Beschreibung für die Richtung. Also wollen wir zunächst untersuchen, wie wir die Richtung der Geraden beschreiben können.

2 Die Steigung beschreibt die Richtung einer Geraden

2.1 Das Steigungsdreieck und die Steigung m

Um die Richtung besser zu verstehen und zu beschreiben, sehen wir uns die linke Grafik in Abb. 2 an.

Abbildung 2: Geraden beschreiben



- Hier sehen wir, dass zur Beschreibung der Geraden neben einem Punkt die Angabe eines rechtwinkligen Dreiecks reicht. Dessen Grundseite muss dabei auf der Geraden liegen. Solch ein Dreieck nennen wir ein **Steigungsdreieck**.

- Zur genauen Beschreibung dieses Dreiecks können wir die Länge ℓ und die Höhe h verwenden. In dem linken Beispiel in Abb. 2 ist $P(4/6)$ und $Q(1/3)$ und für die Seitenlängen des Dreiecks lesen wir $\ell = 4 - 1 = 3$ und $h = 6 - 2 = 4$ ab.

- Für die Beschreibung der Geraden benötigen wir aber gar nicht die tatsächliche Größe des Dreiecks, sondern nur seine 'Form': in der rechten Grafik in Abb. 2 ist es egal, ob wir das 'alte' rote Dreieck zur Beschreibung hernehmen oder das 'neue' grüne.

  Wenn wir uns nun generell darauf einigen, dass wir immer ein Dreieck verwenden wollen, dessen Länge genau $\ell = 1$ ist, dann reicht es, dessen entsprechende Höhe anzugeben.

- Die Höhe dieses Steigungsdreiecks der Länge $\ell = 1$ nennen wir **Steigung der Geraden**.

  Weil es in den meisten Büchern so üblich ist, bezeichnen wir die Steigung mit dem Buchstaben m.

- Aus Gründen des Maßstabs kann es schwierig sein, ein Dreieck der Länge $\ell = 1$ zu zeichnen. Wie erhalten wir aber aus einem beliebigen Steigungsdreieck die Steigung m?

  Dazu sehen wir uns in der rechten Grafik in Abb. 2 die zwei ineinander verschachtelten Dreiecke an. Der Strahlensatz[1] sagt uns nun, dass

  $$\frac{h_{\text{grün}}}{\ell_{\text{grün}}} = \frac{h_{\text{rot}}}{\ell_{\text{rot}}} \,.$$

  Setzen wir nun noch $h_{\text{grün}} = m$ und $\ell_{\text{grün}} = 1$ so ist

  $$m = \frac{h_{\text{rot}}}{\ell_{\text{rot}}} \,.$$

- Wir setzen fest, dass die Steigung m einer Geraden negativ ist, wenn die Gerade fällt.

2.2 Bestimmung der Steigung ohne Steigungsdreieck

Wir wissen, dass wir ein Steigungsdreieck einfach zeichnen können, wenn wir zwei Punkte der Geraden bereits kennen.

Das ist der Fall in der rechten Grafik in Abb. 2. Hier ist das rote Dreieck durch die zwei Punkte P und Q auf der Geraden gegeben und wir können Höhe und Länge ablesen.

Wie wir in der Grafik aber auch sehen, können wir die Höhe und die Länge des Dreieck allein mit Hilfe der beiden Punkte berechnen! Es ist nämlich h die Differenz der beiden y-Werte und ℓ die Differenz der beiden x-Werte:

$$h = y_P - y_Q, \quad \ell = x_P - x_Q \,.$$

[1] Zum Strahlensatz siehe Wikipedia:Strahlensatz.

Damit können wir Die Steigung m der Geraden durch P und Q dann allein mit Hilfe dieser beiden Punkte und ohne Skizze berechnen:

$$\boxed{m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}}$$

oder in unserem Beispiel ganz explizit

$$m = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}\,.$$

> Nutzen wir die Formel $m = \dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ zur Berechnung der Steigung, so erhalten wir das Vorzeichen automatisch
>
> **ACHTUNG:** Dabei müssen wir genau darauf achten, dass wir bei der Berechnung im Zähler und im Nenner jeweils mit dem selben Punkt beginnen!

3 Wir berechnen den y-Achsenabschnitt b und bekommen die Geradengleichung

Wie hilft uns nun die im vorigen Abschnitt berechnete Steigung dabei, den y-Achsenabschnitt b zu finden, wenn wir diesen nicht aus einem Diagramm ablesen können?

Dazu sehen wir uns die Abbildung 3 an:

- Wir können wie zuvor aus dem roten Steigungsdreieck die Steigung berechnen:

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

- Wir zeichnen ein weiteres (blaues) Steigungsdreieck, das von dem noch unbekannten y-Achsenabschnitt zu einem der beiden Punkte verläuft. Dessen Höhe und Länge ergeben sich mit dem (noch) unbekannten b zu $h = 6 - b$ und $\ell = 4$.

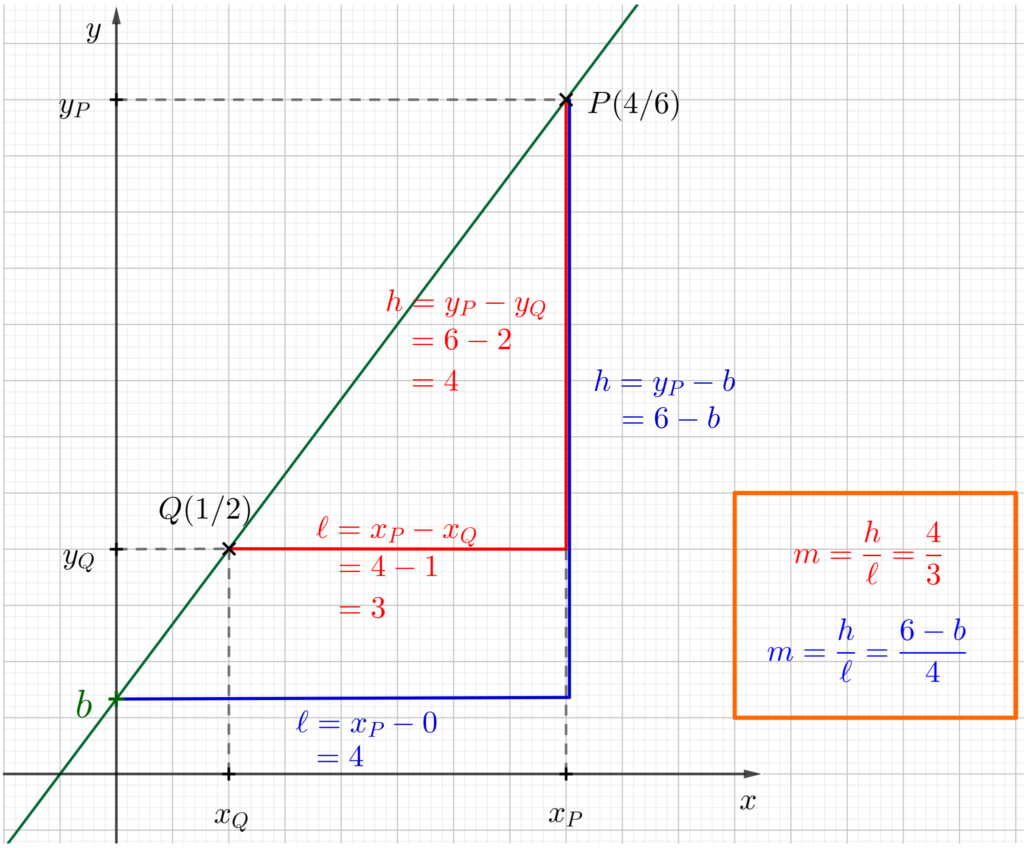
  Daraus können wir ebenfalls die Steigung bestimmen:

$$m = \frac{6-b}{4}\,.$$

- Die beiden Werte für die Steigung, die wir aus dem roten und blauen Dreieck bekommen haben, müssen gleich sein. Das gibt uns die folgende Gleichung:

$$\frac{6-b}{4} = \frac{4}{3}\,.$$

Abbildung 3: Zur Bestimmung des y-Achsenabschnitts



Diese Gleichung könne wir nun nach b auflösen:

$$\begin{aligned}
\frac{6-b}{4} &= \frac{4}{3} && \Big| \cdot 4 \\
6 - b &= \frac{16}{3} && \Big| + b \\
6 &= \frac{16}{3} + b && \Big| - \frac{16}{3} \\
\frac{2}{3} &= b
\end{aligned}$$

Den gleichen Wert b hätten wir auch erhalten, wenn wir statt P den Punkt Q verwendet hätten.

3.1 Die Geradengleichung der Gerade

Mit den obigen Überlegungen können wir eine Formel herleiten, die die Steigung m, den y-Achsenabschnitt b und einen weiteren Punkt $P(x/y)$ der Geraden miteinander in Verbindung bringt.

Dazu verzichten wir darauf, im "blauen Dreieck" die Werte von P sofort einzusetzen und verwenden stattdessen $P(x/y)$. Das heißt zusammen mit m aus dem roten

Dreieck bekommen wir $\frac{y-b}{x}$ aus dem blauen. Setzen wir das wieder gleich, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{y-b}{x} &= m && \Big| \cdot x \\ y-b &= m \cdot x && \Big| + b \\ y &= m \cdot x + b \end{aligned}$$

> Die **Geradengleichung** verbindet die Steigung m, den y-Achsenabschnitt b und einen beliebigen Punkt $P(x/y)$ der Geraden miteinander. Sie lautet
>
> $$\boxed{y = m \cdot x + b}$$
>
> Die Geradengleichung der Geraden nennt man auch **Normalform der Geraden**.

4 Wichtige Beispielaufgaben und Bemerkungen zur Geradengleichung

4.1 Testen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt

Wenn wir die Geradengleichung einer Geraden haben, dann können wir denkbar einfach überprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt oder nicht.

Dazu müssen wir die x- und y-Komponenten des Punktes lediglich in die Geradengleichung einsetzen und das Ergebnis überprüfen: Ist das Ergebnis wahr, dann liegt der Punkt auf der Geraden, und ist das Ergebnis falsch, dann nicht.

Als Beispiel fragen wir, ob die Punkte $A(2/18)$ und $B(-1/5)$ auf der Geraden $y = 4x + 10$ liegen:

- Wir setzen die Komponenten von A in die Geradengleichung der Geraden ein:

  $$18 = 4 \cdot 2 + 10\,.$$

  Da das wahr ist, liegt A auf der Geraden.

- Wir setzen die Komponenten von B in die Geradengleichung der Geraden ein:

  $$5 = 4 \cdot (-1) + 10\,.$$

  Da das falsch ist, liegt B nicht auf der Geraden.

4.2 Bestimmung der Geradengleichung aus der Steigung und einem Punkt

Das ist genau die Aufgabe, die uns oben zur Geradengleichung geführt hat und wir sehen uns das an einem weiteren Beispiel an.

Eine Gerade ist durch den Punkt $A(2/-4)$ und die Steigung $m = 3$ gegeben. Ihre Geradengleichung $y = mx + b$ erhalten wir auf folgendem Weg:

- Die Steigung m haben wir, daher wissen wir bereits $y = 3x + b$. D. h. wir brauchen nur noch b zu finden.

- Wir wissen, dass der Punkt $A(2/-4)$ auf der Geraden liegen soll. Wir können die Komponenten von A also in die Geradengleichung der Geraden einsetzen und erhalten
$$-4 = 3 \cdot 2 + b\,.$$
Wir lösen diese Gleichung nach b auf
$$\begin{aligned} -4 &= 3 \cdot 2 + b \quad && |\text{vereinfachen} \\ -4 &= 6 + b && |-6 \\ -10 &= b \end{aligned}$$

Damit ist die Geradengleichung der gesuchten Geraden
$$y = 3x - 10\,.$$