Frank Klinker

Geraden und lineare Funktionen

Teil 3: Parallele Geraden / Senkrechte Geraden

1 Parallele Geraden

Zwei Geraden heißen **parallel**, wenn sie in die gleiche Richtung verlaufen.

Wenn zwei Geraden parallel sind, dann haben ihre Steigungsdreiecke immer die gleiche Form. Mit anderen Worten, die Geraden haben die gleiche Steigung m.

Wenn umgekehrt zwei Geraden die gleiche Steigung haben, so sind sie parallel.

Dabei unterscheiden wir **echt parallele Geraden** die sich niemals schneiden und **identische Geraden**.

Parallele und identische Geraden

Zur Unterscheidung, ob zwei Geraden mit gleicher Steigung identisch oder echt parallel sind, untersuchen wir sie auf gemeinsame Punkte. Dabei reicht es, folgendes zu überprüfen:

a) Wenn zwei Geraden die gleiche Steigung haben und es einen Punkt gibt, der auf der einen Geraden liegt aber nicht auf der anderen, dann sind die Geraden echt parallel.

b) Wenn zwei Geraden die gleiche Steigung haben und nur einen gemeinsamen Punkt, dann haben sie sofort alle Punkte gemeinsam und sind damit gleich!

Bemerkung 1. Sehr einfach sehen wir das, wenn die Geraden durch ihre Geradengleichungen gegeben sind:

a) Die Geraden sind echt parallel, wenn die Steigungen gleich und die y-Achsenabschnitte unterschiedlich sind

b) Die Geraden sind identisch, wenn die Steigungen und auch die y-Achsenabschnitte gleich sind (dann sind ja sogar die Geradengleichungen insgesamt gleich!).

Beispiel 2. Die Gerade $\mathfrak{g}_1$ ist durch die Punkte $A(-1/3)$ und $B(1/7)$, die Gerade $\mathfrak{g}_2$ durch ihre Geradengleichung $y = 2x + 4$ und $\mathfrak{g}_3$ durch den Punkt $P(-2/0)$ und die Steigung $m = 2$.

- Zunächst sieht man, dass die Gerade $\mathfrak{g}_1$ die Steigung $m = \frac{7-3}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$ hat. Somit haben alle drei Geraden die gleiche Steigung.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 16. Juli 2024

- Der Punkt $B(-2/0)$ von $\mathfrak{g}_3$ liegt auf $\mathfrak{g}_2$, denn $0 = 2 \cdot (-2) + 4$ ist wahr. Damit sind $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_3$ identisch.

- Der Punkt $A(-1/3)$ von $\mathfrak{g}_1$ liegt nicht auf $\mathfrak{g}_2$, denn $4 = 2 \cdot (-1) + 5$ ist falsch. Damit ist $\mathfrak{g}_1$ echt parallel zu $\mathfrak{g}_2$ (und natürlich auch zu $\mathfrak{g}_3$).

2 Senkrechte Geraden

▷ Zwei Geraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ sind senkrecht, wenn sie sich schneiden und im Schnittpunkt ein Winkel von 90° anliegt, siehe Abbildung 1, links.

▷ Wir erhalten die Gerade $\mathfrak{h}$ aus der Geraden $\mathfrak{g}$, wenn wir $\mathfrak{g}$ um den Schnittpunkt um 90° drehen.

▷ Zeichnen wir zu $\mathfrak{g}$ noch ein Steigungsdreieck der Breite 1 ein, so dreht sich dieses mit und liefert ein Steigungsdreieck der Geraden $\mathfrak{h}$, siehe Abbildung 1, rechts.

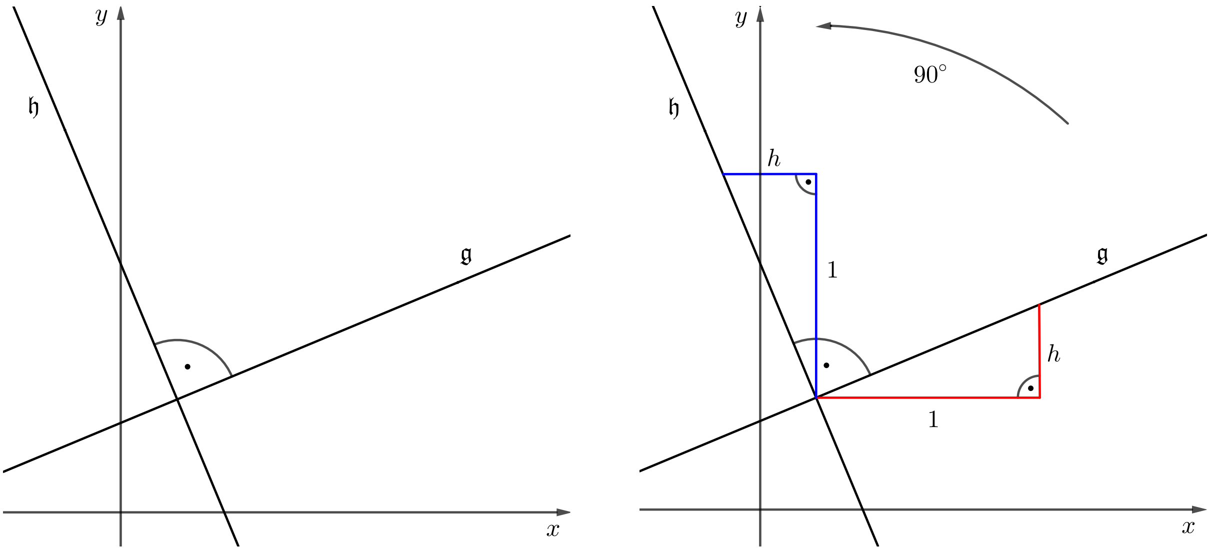

Abbildung 1: Senkrechte Geraden

Bemerkung 3.

1. - Wenn $\mathfrak{g}$ eine positive Steigung hat (d. h. $\mathfrak{g}$ steigt), dann hat die senkrechte Gerade $\mathfrak{h}$ eine negative Steigung (d. h. $\mathfrak{h}$ fällt).
   - Wenn $\mathfrak{g}$ eine negative Steigung hat (d. h. $\mathfrak{g}$ fällt), dann hat die senkrechte Gerade $\mathfrak{h}$ eine positive Steigung (d. h. $\mathfrak{h}$ steigt).

2. Die Steigungsdreiecke von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ sind kongruente Dreiecke. Daher hat das Steigungsdreieck von $\mathfrak{h}$ in Abbildung 1 die Breite h und die Höhe 1.

   Bis auf das Vorzeichen ist die Steigung von $\mathfrak{h}$ deshalb durch $\frac{1}{h}$ gegeben:

   - Ist $m_{\mathfrak{g}} = h > 0$ so ist $m_{\mathfrak{h}} = -\frac{1}{h} < 0$
   - Ist $m_{\mathfrak{g}} = -h < 0$ so ist $m_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{h} > 0$

Zusammenfassung 4.
Die letzte Bemerkung lässt sich in den beiden folgenden gleichwertigen Aussagen zusammenfassen:

- Hat eine Gerade die Steigung m und ist eine zweite Gerade senkrecht zu der ersten, so besitzt die zweite die Steigung $-\frac{1}{m}$.
- Sind zwei Geraden senkrecht, so ist das Produkt ihrer Steigungen -1.

Es gilt auch die Umkehrung dieser Aussagen. Diese kann man dann wie folgt formulieren:

- Haben zwei Geraden die Steigungen m und $-\frac{1}{m}$, so sind sie senkrecht zueinander.
- Ist das Produkt der Steigungen zweier Geraden -1, so sind die Geraden senkrecht.

3 Senkrechte Geraden und der Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck teilt der Höhenfußpunkt die Hypotenuse in zwei Teilstrecken der Längen p und q.

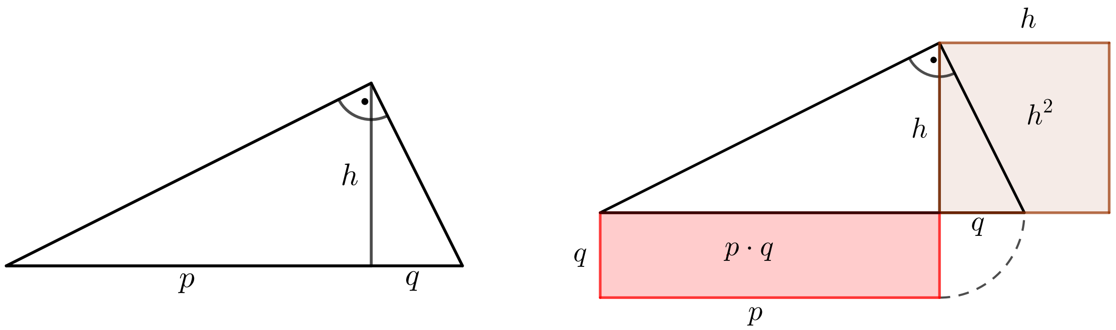

Abbildung 2: Der Höhensatz

Der Höhensatz verbindet nun die Längen p und q der beiden Hypotenusenteilstrecken mit der Höhe h, siehe Abbildung 2. Es gilt

$$\boxed{\text{Höhensatz:} \qquad h^2 = p \cdot q}$$

Mit Hilfe des Höhensatzes sehen wir ebenfalls die Steigungsbeziehung bei senkrechten Geraden. Dazu sehen wir uns die Abbildung 3 an und betrachten dort die zwei eingezeichneten Steigungsdreiecke:

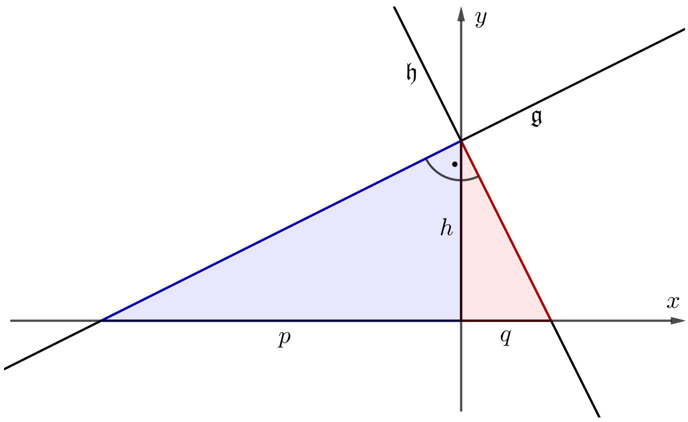

Abbildung 3: Die Steigungsdreiecke und der Höhensatz

- Das Steigungsdreieck zu $\mathfrak{g}$ hat die Breite p und die Höhe h. Da $\mathfrak{g}$ steigt, ist die Steigung
$$m_\mathfrak{g} = \frac{h}{p}$$
- Das Steigungsdreieck zu $\mathfrak{h}$ hat die Breite q und ebenfalls die Höhe h. Da $\mathfrak{h}$ fällt, ist die Steigung
$$m_\mathfrak{h} = -\frac{h}{q}$$

Bilden wir nun das Produkt aus beiden Steigungen so sehen wir

$$m_\mathfrak{g} \cdot m_\mathfrak{h} = \frac{h}{p} \cdot \left(-\frac{h}{q}\right) = -\frac{h^2}{pq} \overset{\text{Höhensatz}}{=} -1\,.$$

Das ist wieder die Aussage des ersten Teils der obigen Zusammenfassung.[1]

[1]Die Gültigkeit des zweiten Teils der Zusammenfassung folgt aus der Tatsache, dass der Höhensatz nur gilt, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.