Frank Klinker

Stochastik

Teil 1: Zufallsexperimente und zugehörige Grundbegriffe

1 Zufallsexperiment, Ergebnis, Ergebnismenge

Unter einem **Zufallsexperiment** versteht man ein Experiment, bei dem mehrere Ausgänge möglich sind. So ein Ausgang heißt **Ergebnis**. Ein Zufallsexperiment hat die weitere Eigenschaft, dass das konkrete Ereignis prinzipiell nicht vorhersagbar ist (man sagt **nicht deterministisch**).

Um Zufallsexperimente mit mathematischen Mitteln beschreiben zu können, fordert man zusätzlich noch, dass es unter den gleichen Bedingungen beliebig wiederholt werden kann.

Es ist erst vollständig beschrieben, wenn man alle Ergebnisse kennt. Die Menge aller Ergebnisse nennt man **Ergebnismenge** und bezeichnet Sie oft mit Ω.

Ein Zufallsexperiment ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert.

- Das Experiment kann unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden.
- Die Ergebnisse des Experiments sind zufällig.
- Die Ergebnismenge Ω ist bekannt.

Beispiel 1.

1. Der Wurf eines Würfels ist ein Zufallsexperiment.
2. Die Zerstörung eines Hauses durch einen Hurricane ist kein Zufallsexperiment.
3. Der Wurf mit einem (gewöhnlichen) Würfel hat die Ergebnismenge $\Omega_{\mathrm{W}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. Der Wurf mit einer Münze hat idealerweise zwei Ergebnisse. Diese werden oft mit Zahl (Z) und Kopf (K) bezeichnet, also $\Omega_{\mathrm{M}} = \{Z, K\}$.

Hat ein Zufallsexperiment nur endlich viele Ergebnisse, dann bezeichnen wir diese mit e_i und schreiben $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Man schreibt $\#\Omega = n$ für die Anzahl der Ergebnisse und nennt n den **Umfang** des Zufallsexperiments.

Beispiel 2. Es ist $\#\Omega_{\mathrm{W}} = 6$ und $\#\Omega_{\mathrm{M}} = 2$.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 20. August 2025

2 Mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme

2.1 Mehrstufige Zufallsexperimente

Unter einem **mehrstufigen Zufallsexperiment** versteht man ein Zufallsexperiment, das aus mehreren (hintereinander oder gleichzeitig ausgeführten) Zufallsexperimenten besteht.

Jedes Ergebnis ist somit ein Tupel aus den Ergebnissen der Teilexperimente.

Beispiel 3.

1. Ein Standardbeispiel ist das Werfen mit zwei unterscheidbaren Würfeln. Die Ergebnismenge ist

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(5,6),(6,6)\}\\ &= \{(i,j)\,|\,1\leq i\leq 6, 1\leq j\leq 6\}\,.\end{aligned}$$

   Das gleiche erhält man, wenn man einem Würfel zweimal hintereinander wirft.

2. Ein weiteres Beispiel ist das mehrmalige Werfen einer Münze. Hier ist die Ergebnismenge:

$$\begin{aligned}\Omega &= \big\{(Z,K,K),(Z,Z,K),(Z,Z,Z),(Z,K,Z),(K,K,K),(K,Z,K),(K,Z,Z),(K,K,Z)\big\}\\ &= \big\{(i,j,k)\,\big|\,i,j,k\in\Omega_{\mathrm{M}}\big\}\end{aligned}$$

Etwas allgemeiner kann man das so formulieren:

Die Ergebnismenge eines k-stufigen Zufallsexperimentes ist

$$\Omega = \big\{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\,\big|\,i_1\in\Omega_1, i_2\in\Omega_2,\ldots,i_k\in\Omega_k\big\}$$

Dabei sind $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_k$ die Ergebnismengen der beteiligten Zufallsexperimente.[1]

Ist $\#\Omega_1 = n_1, \#\Omega_2 = n_2, \ldots, \#\Omega_k = n_k$, dann ist $\#\Omega = n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$.

Beispiel 4.

1. Für den gleichzeitigen Wurf einem Würfel und einer Münze ist $\#\Omega = \#\Omega_{\mathrm{M}}\cdot\#\Omega_{\mathrm{W}} = 2\cdot 6 = 12$
2. Das zweifache Werfen mit einer Münze hat den Umfang $\#\Omega_{\mathrm{M}}\cdot\#\Omega_{\mathrm{M}} = 2\cdot 2 = 4$.

Bemerkung 5. Das gleichzeitige Werfen mit zwei Münzen, die man nicht unterscheiden kann, ist kein mehrstufiges Zufallsexperiment. Die Ergebnismenge ist $\Omega = \big\{\{K,Z\},\{Z,Z\},\{K,K\}\big\}$.

Jedes Ergebnis lässt sich hier aber mit Hilfe der Ergebnisse des zweimaligen Münzwurfs beschreiben:

[1] Diese Konstruktion nennt man auch das **kartesische Produkt** der Mengen und schreibt $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\times\Omega_k$.

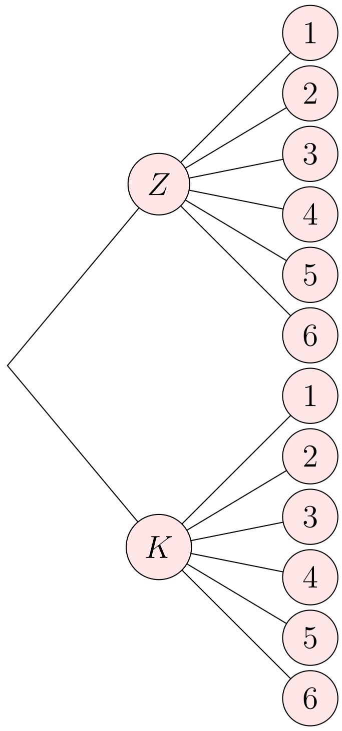
Ergebnis des Wurfs mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln	Ergebnis des zweimaligen Münzwurfs
$\{Z, Z\}$	(Z, Z)
$\{K, K\}$	(K, K)
$\{Z, K\}$	(Z, K), (K, Z)

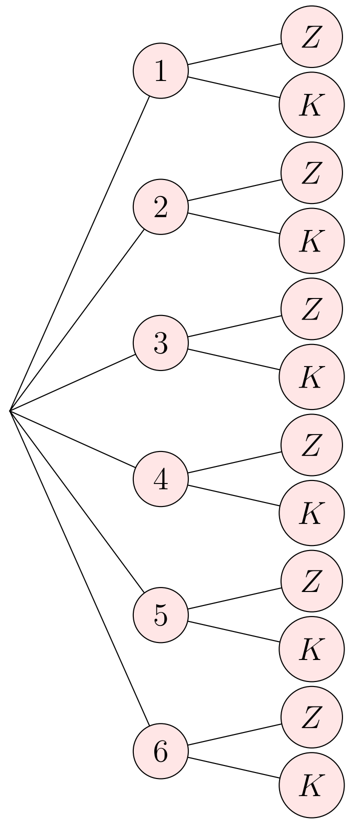
2.2 Beschreibung mit Baumdiagrammen

Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich sehr oft übersichtlich mit Hilfe von **Baumdiagrammen** beschreiben.

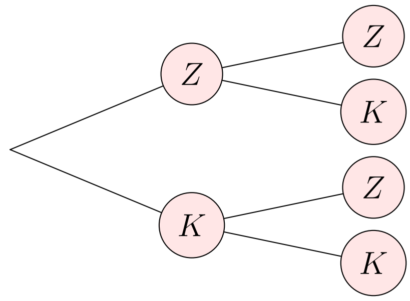
Jede Ebene des Baumes beschreibt dabei einen der beteiligten Zufallsexperimente.

Beispiel 6. 1. Die beiden folgenden Baumdiagramm beschreiben das gemeinsame Werfen einer Münze und eines Würfels:





2. Das Baumdiagramm zum zweimaligen Münzwurf ist



3 Ereignisse

3.1 Grundlegende Eigenschaften von Ereignissen

Als **Ereignis** eines Zufallsexperiments bezeichnet man eine Teilmenge der Ergebnismenge: $E \subset \Omega$.

Beispiel 7. 1. Alle Ereignisse des Münzwurfs mit $\Omega = \{Z, K\}$ sind

$$\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{Z\}$$

Es gibt also 4 verschiedene Ereignisse.

2. Alle Ereignisse des Ziehens einer Kugel aus einer Urne mit drei Kugeln (rot, grün, blau) sind

$$\varnothing, \{r\}, \{g\}, \{b\}, \{r, g\}, \{r, b\}, \{g, b\}, \{r, g, b\}$$

Es gibt also 8 verschiedene Ereignisse.

Bemerkung 8. Ist $\#\Omega = n$, dann gibt es 2^n verschiedene Ereignisse.[2]

Bezeichnung 9. 1. Man sagt das **Ereignis** $E \subset \Omega$ **ist eingetreten**, wenn das Ergebnis $e \in \Omega$ eingetreten ist und $e \in E$ ist.

2. Die Menge $\Omega \subset \Omega$ tritt als Ereignis immer dann ein, wenn irgendein Ergebnis $e \in \Omega$ eingetreten ist. Man nennt Ω selbst deshalb auch das **sichere Ereignis**.

3. Die leere Menge $\varnothing \subset \Omega$ bezeichnet das Ereignis, dass nie eintritt. Man nennt es auch das **unmögliche Ereignis**.

4. Das Gegenereignis $\bar{E}$ zum Ereignis E besteht aus den Ergebnissen in Ω, die nicht in E enthalten sind.

   - Ist $E = \{1, 2\} \subset \Omega_{\mathrm{W}}$, dann ist $\bar{E} = \{3, 4, 5, 6\}$.

[2]Die Menge aller Teilmengen einer Menge Ω heißt auch **Potenzmenge** von Ω und wird mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet. Ist $\#\Omega = n$, dann ist $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$.

- Es ist immer $\bar{\Omega} = \varnothing$ und $\bar{\varnothing} = \Omega$ und $\bar{\bar{E}} = E$.

Ereignisse lassen sich auch (mehr oder weniger elegant) sprachlich formulieren und dann eindeutig einer Teilmenge zuordnen.

Beispiel 10.
1. E_1 :"Ein Wurf mit einem Würfel gibt einen Wert kleiner als 4", $E_1 = \{1, 2, 3\} \subset \Omega_\mathrm{W}$.
2. E_2 :"Ein Wurf mit einer Münze ergibt Kopf oder Zahl", $E_2 = \{1, 2\} \subset \Omega_\mathrm{M}$.
3. E_3 :"Ein Wurf mit einer Münze ergibt Kopf und Zahl", $E_3 = \emptyset \subset \Omega_\mathrm{M}$.
4. E_4 :"Die gezogene Kugel aus der Urne aus Beispiel 7.2 ist rot", $E_4 = \{r\} \subset \Omega$

Achtung: Wenn ein Ereignis eingetreten ist, dann heißt es nicht, dass kein anderes eingetreten sein kann:

Beispiel 11.
1. E_4 ist auch eingetreten beim Ereignis $\{r, b\}$
2. Das Ereignis F :"Der Wurf mit zwei unterschiedlichen Würfeln gibt eine Augensumme kleiner als 7" ist auch eingetreten beim Ereignis E :"Der Wurf mit zwei unterschiedlichen Würfeln hat einen Pasch mit Augenzahl kleiner als 4", denn

$$\begin{aligned} F = \big\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\ &(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\big\} \\ E = \big\{&(1,1),(2,2),(3,3)\big\} \end{aligned}$$

Bemerkung 12. Wenn man von Ereignissen spricht, dann spricht man also von Teilmengen der Ergebnismenge Ω. Deshalb kann man auch die Mengenoperationen sprachlich mit Ereignissen formulieren:

E tritt ein oder F tritt ein	$E \cup F$
E tritt ein und F tritt ein	$E \cap F$
E tritt nicht ein	$\bar{E}$
Wenn E eintritt, dann tritt auch F ein	$E \subset F$

3.2 Ereignisräume

Als Ereignisraum $\mathcal{E}$ eines Zufallsversuchs mit der Ergebnismenge Ω bezeichnet die Menge der Ereignisse, die eintreten können.

Damit ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ muss aber nicht gleich diesem sein – auch wenn es in den hier verwendeten Beispielen in der Regel so ist.

Ein Ereignisraum über Ω muss also nicht alle möglichen Teilmengen von Ω enthalten.[3]

[3] Ist Ω endlich oder enthält Ω nur abzählbar unendlich viele Ergebnisse, dann kann man ohne Probleme stets $\mathcal{E} = \mathcal{P}(M)$ wählen. Probleme im weiteren Verlauf der Stochastik kann es höchstens in dem Fall geben, wenn die Ergebnismenge überabzählbar ist.

Forderungen an einen Ereignisraum:[4]

1. Man möchte das Ereignis beschreiben können, welches irgendein Ergebnis eintritt. Also $\Omega \in \mathcal{E}$
2. Man möchte beschreiben können, dass ein Ergebnis nicht eintritt. Also soll mit E auch $\bar{E}$ in $\mathcal{E}$ enthalten sein.
3. Können die (abzählbar vielen) Ereignisse $E_1, \ldots, E_k, \ldots$ eintreten, so soll auch deren Vereinigung eintreten können, Also liegt mit den einzelnen Mengen auch die Vereinigung $E_1 \cup \ldots \cup E_k \cup \ldots$ ebenfalls in $\mathcal{E}$.

Beispiel 13. 1. $\mathcal{E} = \big\{\varnothing, \Omega_M, \{r\}, \{g, b\}\big\}$ ist ein Ereignisraum zu Beispiel 7.2

2. Interpretiert man eine Wahlumfrage "Welche der zur Wahl stehenden Parteien $p_1, \ldots, p_7$ wählen Sie?" als Zufallsexperiment[5] mit Ergebnisraum $\Omega = \{p_1, \ldots, p_7\}$, dann ist $\mathcal{E} = \{\text{keine}, p_1, \text{sonstige}, \text{irgendeine}\}$ ein möglicher Ergebnisraum.
3. Formuliert man die Frage im dem vorigen Beispiel gemäß "Wählen Sie Partei p_1?" dann ist der obige Ereignisraum sogar die Potenzmenge der zugehörigen Ergebnismenge.
4. Die Beispiele sind 1 und 3 sind von folgendem Typ:

   Ist E ein Ereignis mit $E \subset \Omega$, dann ist

   $$\mathcal{E}_E = \{\varnothing, E, \bar{E}, \Omega\}$$

   der "kleinste" Ereignisraum über Ω, der E enthält.

   Für $E = \varnothing$ ist $\mathcal{E}_\varnothing = \{\varnothing, \Omega\}$ der "kleinste" Ereignisraum über Ω überhaupt.

   Somit gilt für Für alle Ereignisräume $\mathcal{E}$ mit $E \in \mathcal{E}$:

   $$\mathcal{E}_\varnothing \subset \mathcal{E}_E \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)\,.$$

4 Zufallsvariablen

Als Zufallsvariable eines Zufallsexperiments mit Ergebnismenge Ω bezeichnet man eine Abbildung X, die jedem Ergebnis eine Zahl zuordnet, also:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}\,.$$

Das Ereignis E_k, dass den Wert $k \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird, besteht aus allen Werten $e \in \Omega$ mit $X(e) = k$, also

$$E_k = X^{-1}(\{k\}) = \{e \in \Omega \,|\, X(e) = k\}$$

Statt E_k schreiben wir auch "Ereignis mit $X = k$" oder sogar nur kurz "$X = k$".

[4] Mathematisch spricht man hier von einer **σ-Algebra** über Ω.

[5] Diskutieren Sie, inwiefern es hier Probleme bei der Interpretation geben kann.

Zufallsvariablen ergeben sich oft recht natürlich aus Fragestellungen auf der Basis von Zufallsexperimenten:

Beispiel 14. 1. X gibt den Wert des Wurfes eines gewöhnlichen Würfels wieder:

$$X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{R}, \qquad X(k) = k\,.$$

Dann entspricht $X = k$ dem Ergebnis "Der Würfel zeigt den Wert k".

2. X ist der Betrag der Differenz der Augenzahlen bei zweimaligem Würfeln:

$$X : \left\{(i, j) \,\middle|\, 1 \le i, j \le 6\right\} \to \mathbb{R}\,, \qquad X(i, j) = |i - j|$$

Dann ist

k	e mit $X(e) = k$
0	$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$
1	$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)(6,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1)$
2	$(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(6,4),(5,3),(4,2),(3,1)$
3	$(1,4),(2,5),(3,6),(6,3),(5,3),(4,1)$
4	$(1,5),(2,6),(6,2),(5,1)$
5	$(1,6),(6,1)$

Das Ereignis einen Pasch zu würfeln ist dann "$X = 0$" und das Ereignis keinen Pasch zu würfeln ist "$X \ge 1$"

3. X ist die Summe der Augenzahlen bei zweimaligem Würfeln:

$$X : \left\{(i, j) \,\middle|\, 1 \le i, j \le 6\right\} \to \mathbb{R}\,, \qquad X(i, j) = i + j$$

Dann ist

k	e mit $X(e) = k$
2	$(1,1)$
3	$(1,2),(2,1)$
4	$(1,3),(2,2),(3,1)$
5	$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$
6	$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$
7	$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,3),(6,1)$
8	$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$
9	$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$
10	$(4,6),(5,5),(6,4)$
11	$(5,6),(6,5)$
12	$(6,6)$

4. X gibt an, wie oft man in der Urne aus Beispiel 7.2 ohne Zurücklegen ziehen muss, bis man die rote Kugel hat.

k	e mit $X(e) = k$
1	r
2	gr, br
3	gbr, bgr

Hier ist die Ergebnismenge $\Omega = \{r, gr, br, gbr, bgr\}$ gewählt, die man erhält, wenn man nach der roten Kugel aufhört zu ziehen.

5. Lässt man statt dessen im vorigen Beispiel immer drei Züge zu, und wertet anschließend X aus, dann erhält man ein dreistufiges Zufallsexperiment mit $\Omega = \{(r, g, b), (r, b, g), (b, r, g), (g, r, b), (b, g, r), (g, b, r)\}$. Die zu X gehörige Tabelle sieht dann wie folgt aus:

k	e mit $X(e) = k$
1	$(r, g, b), (r, b, g)$
2	$(g, r, b), (b, r, g)$
3	$(g, b, r), (b, g, r)$

6. Bei einem Glücksspiel mit Münzwurf erhält man beim dreimaligen Werfen bei Würfen mit einem oder zwei Köpfen für jeden Kopf 1,50€. Wirft man keinen keinem Kopf oder nur Köpfe, dann muss man 7€ zahlen. X beschreibt den Gewinnbetrag:

k (in €)	e mit $X(e) = k$
1,5	$(K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K)$
3,0	$(K, K, Z), (K, Z, K), (Z, K, K)$
$-7{,}0$	$(K, K, K), (Z, Z, Z)$

Einige sinnvolle Fragen sind nun: Ist dieses Spiel fair? (was heißt fair überhaupt?); Falls das Spiel nicht fair ist: Was kann man ändern, damit es fair wird?

5 Bernoulli-Experimente

Eine sehr einfache Klasse von Zufallsexperimenten sind die Bernoulli-Experimente:

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen.

Zu viele Zufallsexperimente kann man Bernoulli-Experimente formulieren:

Beispiel 15.

- Der Münzwurf ist selbst ein Bernoulli-Experiment
- Oben wurde für den Wurf mit einem Würfel die Zufallsvariable mit $X(k) = k$ definiert, wenn k dem Wert des Wurfs entspricht. Dann ist $\Omega = \{X < k, X \geq k\}$ für jedes k die Ergebnismenge eines Bernoulli-Experiments.
- Das vorige Beispiel kann man auf jedes Zufallsexperiment mit einer Zufallsvariable verallgemeinern.