Frank Klinker

Trigonometrie

Teil 2: Beziehungen zwischen den trigonometrischen Ausdrücken

1 Erste Beziehungen zwischen den trigonometrischen Ausdrücken

Die ersten einfachen Beziehungen erhält man direkt aus der Definition von Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens und mit Hilfe des Satzes von Pythagoras am rechtwinkligen Dreieck.

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}} \qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

> Die erste Formel folgt direkt aus den Definitionen am rechtwinkligen Dreieck:
>
> $$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{Hyp}}}{\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{Hyp}}} = \frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{Hyp}} \cdot \frac{\mathrm{Hyp}}{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{AK}} = \tan(\alpha)\,.$$
>
> Die zweite Formel ergibt sich direkt aus der Definition des Kotangens in Bemerkung 3 in Teil 1. Die dritte und vierte Formel folgt aus den ersten zwei.

Eine der wichtigsten Formeln im Zusammenhang mit den trigonometrischen Ausdrücken ist der **trigonometrische Pythagoras**:[1]

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Mit diesem erhält man dann weitere nützliche Formeln:

$$\boxed{1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}} \qquad \boxed{1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 1. September 2023

[1] Als abkürzende Schreibweise nutzt man üblicherweise:
$\sin^2(\alpha) = \big(\sin(\alpha)\big)^2$, $\cos^2(\alpha) = \big(\cos(\alpha)\big)^2$, $\tan^2(\alpha) = \big(\tan(\alpha)\big)^2$ und $\cot^2(\alpha) = \big(\cot(\alpha)\big)^2$

Die erste Formel folgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$\begin{aligned} \mathrm{GK}^2 + \mathrm{AK}^2 = \mathrm{Hyp}^2 \overset{:\mathrm{Hyp}^2}{\iff} & \frac{\mathrm{GK}^2}{\mathrm{Hyp}^2} + \frac{\mathrm{AK}^2}{\mathrm{Hyp}^2} = 1 \\ \iff & \left(\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{Hyp}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{Hyp}}\right)^2 = 1 \\ \iff & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1\,. \end{aligned}$$

Die zwei weiteren Formeln ergeben sich indem man den trigonometrischen Pythagoras durch $\cos^2(\alpha)$ oder $\sin^2(\alpha)$ teilt, z. B.:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \overset{:\cos^2(\alpha)}{\iff} & \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \\ \iff & \left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \\ \iff & \tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}\,. \end{aligned}$$

Die folgenden Beziehungen zum Rechnen mit trigonometrischen Ausdrücken ergeben sich aus der Tatsache, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die zwei Winkel α und β zusammen 90° ergeben

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot(\alpha)$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan(\alpha)$

In einem rechtwinkligen Dreieck tauschen Ankathete und Gegenkathete die Rollen, wenn man die Winkel wechselt; das heißt, $\mathrm{GK}_\alpha = \mathrm{AK}_\beta$ und $\mathrm{AK}_\alpha = \mathrm{GK}_\beta$. Außerdem gilt für die zwei Winkel $\alpha + \beta = 90^\circ$, also $\beta = 90^\circ - \alpha$. Das gibt dann die ersten zwei Formeln:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\mathrm{GK}_\alpha}{\mathrm{Hyp}} = \frac{\mathrm{AK}_\beta}{\mathrm{Hyp}} = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)\,, \\ \cos(\alpha) &= \frac{\mathrm{AK}_\alpha}{\mathrm{Hyp}} = \frac{\mathrm{GK}_\beta}{\mathrm{Hyp}} = \sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha)\,. \end{aligned}$$

Hiermit bekommen wir auch die zwei anderen Formeln:

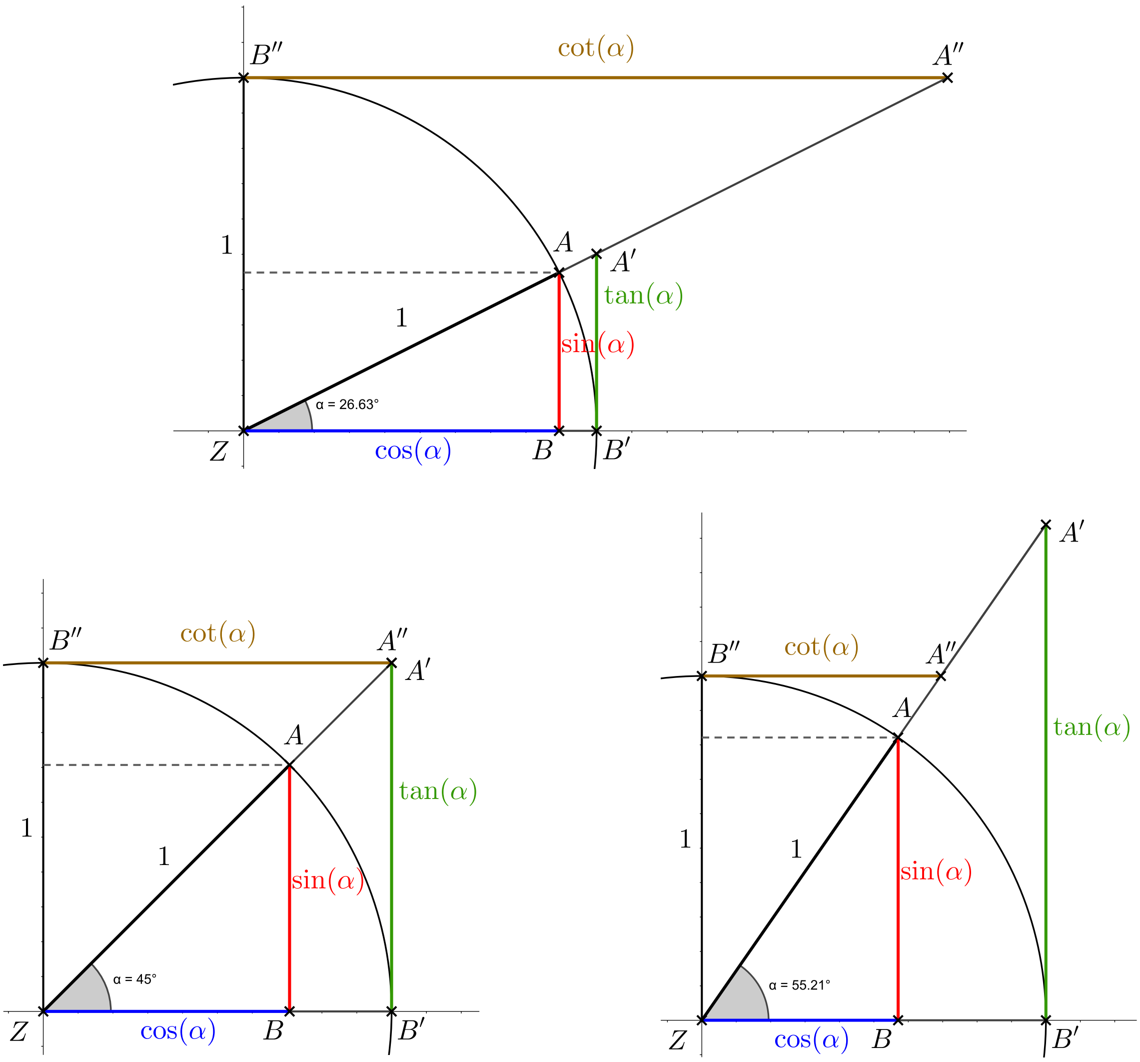
$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \cot(90^\circ - \alpha)\,, \\ \cot(\alpha) &= \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{1}{\cot(90^\circ - \alpha)} = \tan(90^\circ - \alpha)\,. \end{aligned}$$

2 Trigonometrie am Einheitskreis

Um die vier trigonometrischen Ausdrücke sin, cos, tan und cot vergleichen zu können, normieren wir das verwendete rechtwinklige Dreieck. Dazu zeichnen wir dieses in einen Kreis mit Radius 1, wobei der Radius die Hypotenuse des Dreiecks ist.

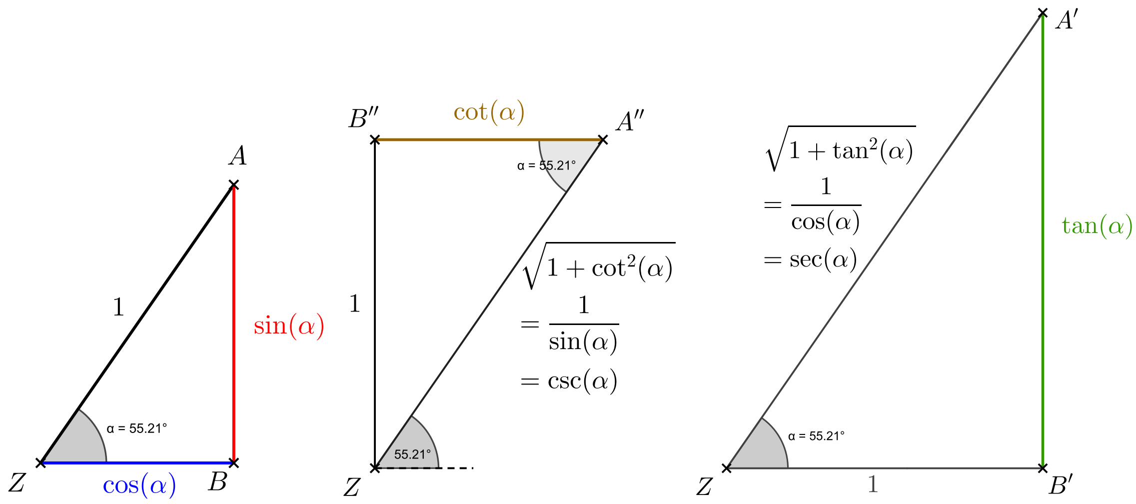
Mit Hilfe der Strahlensätze und der zwei Formeln $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ und $\cot(\alpha)s = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ kann man sehen, dass sich die einzelnen trigonometrischen Ausdrücke sich als Längen in dieser Konstruktion wiederfinden, siehe Abb. 1.

Abbildung 1: Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens am Einheitskreis



Wenn wir aus dieser Konstruktion die drei Dreiecke $\triangle(ZAB)$, $\triangle(ZA'B')$, $\triangle(ZA''B'')$ extrahieren, dann finden wir auch den Sekans und den Kosekans als Seitenlängen wieder. Dabei hilft uns die Tatsache, dass Sekans und den Kosekans die Kehrwerte vom Kosinus und Sinus sind und weiter helfen uns die Formeln aus dem letzten Abschnitt, die sich auch dem Satz von Pythagoras ergaben haben, siehe Abb. 2.

Abbildung 2: Die Teildreiecke $\triangle(ZAB)$, $\triangle(ZA'B')$, $\triangle(ZA''B'')$



3 Additionstheoreme

Als Additionstheoreme bezeichnet man Formeln zur Berechnung trigonometrischer Ausdrücke beinhalten, deren Argumente mehrere Winkel oder ein Vielfaches eines Winkels enthalten; zum Beispiel $\sin(\alpha+\beta)$ oder $\tan(\alpha-\delta)$ oder $\cos(2\gamma)$.

Zunächst listen wir die "klassischen" Additionstheoreme, die sich mit der Summe aus zwei Winkeln beschäftigen:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\boxed{\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\beta)+\cot(\alpha)}}$$

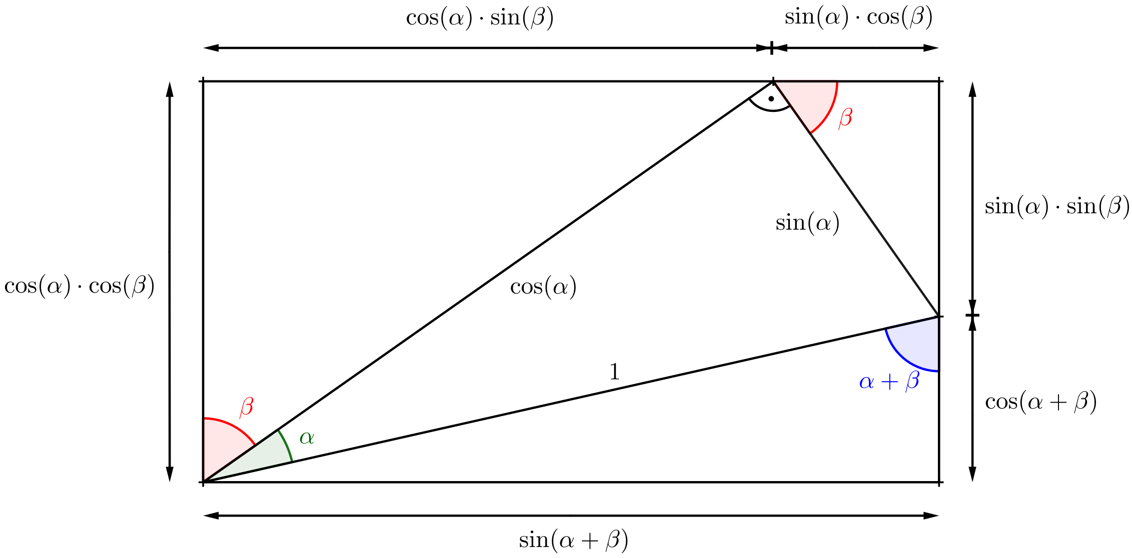
$$\boxed{\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)+1}{\cot(\beta)-\cot(\alpha)}}$$

Für die Begründung der Formeln für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ bietet sich die folgende Abb. 3 an. Hier geben die waagerechten Seiten des Rechtecks die Begründung für $\sin(\alpha+\beta)$ und die senkrechten Seiten des Rechtecks die für $\cos(\alpha+\beta)$.

Die Formeln für $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ ergeben sich aus denen für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, indem man sie geschickt miteinander kombiniert.

Die Formeln für Tangens und Kotangens erhält man mit Hilfe der Formeln für Sinus und Kosinus.

Abbildung 3: Zur Begründung der Additionstheoreme für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$



Wir berechnen exemplarisch $\sin(\alpha-\beta)$.
Dazu nutzen die Formeln $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ aber benennen die Winkel um: den Winkel $\alpha+\beta$ nennen wir γ und den Winkel α nennen wir δ. Für den Winkel β gilt damit $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha=\gamma-\delta$. Die Formeln lauten dann

$$\begin{aligned}\sin(\gamma) &= \sin(\delta)\cos(\gamma-\delta)+\cos(\delta)\sin(\gamma-\delta)\,,\\ \cos(\gamma) &= \cos(\delta)\cos(\gamma-\delta)-\sin(\delta)\sin(\gamma-\delta)\,.\end{aligned}$$

Wir mulitplizieren die erste Geichung mit $\sin(\delta)$ und die zweite mit $\cos(\delta)$:

$$\begin{aligned}\sin(\gamma)\sin(\delta) &= \sin^2(\delta)\cos(\gamma-\delta)+\cos(\delta)\sin(\delta)\sin(\gamma-\delta)\,,\\ \cos(\gamma)\cos(\delta) &= \cos^2(\delta)\cos(\gamma-\delta)-\cos(\delta)\sin(\delta)\sin(\gamma-\delta)\,.\end{aligned}$$

Addieren wir nun beide Gleichungen, dann heben sich auf der rechten Seite die jeweils zweiten Summanden weg und es bleibt

$$\sin(\gamma)\sin(\delta)+\cos(\gamma)\cos(\delta)=\sin^2(\delta)\cos(\gamma-\delta)+\cos^2(\delta)\cos(\gamma-\delta)\,.$$

Klammern wir auf der rechten Seite $\cos(\gamma-\delta)$ aus und beachten den trigonometrischen Pythagoras, dann bleibt

$$\cos(\gamma-\delta)=\cos(\gamma)\cos(\delta)+\sin(\gamma)\sin(\delta)\,.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir den Ausdruck für den Sinus, indem wir oben die erste Gleichung mit $\cos(\delta)$ multiplizieren und die zweite mit $\sin(\delta)$ und anschließend beide Gleichungen von einander abziehen.

Wir berechnen exemplarisch $\tan(\alpha+\beta)$.
Dazu nutzen wir, dass der Tangens der Quotient aus dem Sinus und dem Kosinus ist.

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} \\
&= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} + \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta)}} + \frac{1}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta)}} + \frac{1}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}} + \frac{1}{\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} \\
&= \frac{1}{\cot(\alpha)-\tan(\beta)} + \frac{1}{\cot(\beta)-\tan(\alpha)} \\
&= \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)\cot(\alpha)-\tan(\alpha)\tan(\beta)} + \frac{\tan(\beta)}{\cot(\beta)\tan(\beta)-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\
&= \frac{\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} + \frac{\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\
&= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} .
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir auch die weiteren drei Formeln für den Tangens und Kotangens

Nutzen wir $2\alpha = \alpha + \alpha$, dann bekommen wir aus den obigen Formeln die folgenden Regeln zum Umgang mit doppelten Winkeln:

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \qquad \boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}$$

und

$$\boxed{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}} \qquad \boxed{\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}}$$

Mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras kann man manche der Ausdrücke weiter umschreiben, z. B.

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\
&= 1 - 2\sin^2(\alpha) \\
&= 2\cos^2(\alpha) - 1 .
\end{aligned}$$

Mit den bisherigen Formeln lassen sich dann auch neue herleiten, z.B.

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) , \qquad \cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) .$$

Wir berechnen exemplarisch $\sin(3\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) \\
&= \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) \\
&= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\big(1 - 2\sin^2(\alpha)\big) \\
&= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\big(1 - 2\sin^2(\alpha)\big) \\
&= 2\sin(\alpha)\big(1 - \sin^2(\alpha)\big) + \sin(\alpha)\big(1 - 2\sin^2(\alpha)\big) \\
&= 2\sin(\alpha) - 2\sin^3(\alpha)\big) + \sin(\alpha) - 2\sin^3(\alpha) \\
&= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)
\end{aligned}$$