Frank Klinker

Wachstums- und Zerfallsprozesse

Grundlagen und erste Beispiele

1 Wachstums- und Zerfallsprozesse allgemein

Wachstumsprozesse

- Ein (strenger) Wachstumsprozess wird durch eine (streng) monoton steigende Funktion $f(t)$ beschrieben. Das heißt:

$$\text{Ist } t_2 > t_1, \text{ so ist } f(t_2) \geq f(t_1) \ \big(f(t_2) > f(t_1)\big)$$

- Ein Wachstumsprozess hat stets nicht-negative Steigung, also gilt $f'(t) \geq 0$
- Das liefert zwei wichtige Eigenschaften:
  1. Ist $f'(t) > 0$, dann beschreibt $f(t)$ einen strengen Wachstumsprozess
  2. Jede Stammfunktion einer positiven Funktion beschreibt einen strengen Wachstumsprozess

Zerfallsprozesse

- Ein (strenger) Zerfallsprozess wird durch eine (streng) monoton fallende Funktion $f(t)$ beschrieben. Das heißt:

$$\text{Ist } t_2 > t_1, \text{ so ist } f(t_2) \leq f(t_1) \ \big(f(t_2) < f(t_1)\big)$$

- Ein Zerfallsprozess hat stets nicht-positive Steigung, also gilt $f'(x) \leq 0$
- Das liefert zwei wichtige Eigenschaften:
  1. Ist $f'(t) < 0$, dann beschreibt $f(t)$ einen strengen Zerfallsprozess
  2. Jede Stammfunktion einer negativen Funktion beschreibt einen strengen Zerfallsprozess

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 13. Februar 2025

Bemerkung 1. In der Charakterisierung von strengen Wachstums- und Zerfallsprozessen mit Hilfe der Ableitungsfunktion ist es erlaubt, dass die Ableitung vereinzelte Nullstellen hat.
Ein typisches Beispiel ist die Funktion $f(t) = t^3$. Diese ist streng monoton steigend. Es ist jedoch $f'(t) = 3t^2 > 0$ überall außer in $t = 0$ (hier hat die Funktion einen Sattelpunkt).

Im Folgenden beschränken wir uns zunächst auf Wachstumsprozesse und entwickeln dort einige wichtige Begriffe.

Bei der Diskussion von Zerfallsprozessen werden wir uns später auf einige spezielle Prozesse beschränken und werden damit verbleiben, dass die Untersuchungen hier analog verlaufen, wie bei den Wachstumsprozessen.

2 Spezielle Wachstumsprozesse

2.1 Lineares Wachstum

Das einfachste Modell um Wachstum zu beschreiben ist das **lineare Wachstum**. Dieses lässt sich auf zwei Arten charakterisieren

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein lineares Wachstum, wenn es eine Zahl $a > 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t_1 \leq t_2$

$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2 - t_1)$$

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein lineares Wachstum, wenn es eine Zahl $a > 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte t

$$f(t + 1) = f(t) + a$$

- Ein lineares Wachstum wird stets durch eine lineare Funktion mit positiver Steigung $a > 0$ beschrieben:

$$f(t) = at + c\,.$$

  Der Wert $f(0) = c$ heißt Anfangswert des Wachstums.

Eigenschaften:

- Das lineare Wachstum ist stets unbeschränkt.

2.2 Exponentielles Wachstum

Neben dem linearen Wachstum ist das **exponentielle Wachstum** ein in natürlichen Prozessen vorkommendes Phänomen.

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein exponentielles Wachstum, wenn es eine Zahl $a > 1$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte t

$$f(t+1) = a \cdot f(t)\,.$$

- Ein exponentielles Wachstum wird stets durch eine Exponentialfunktion mit Basis $a > 1$ beschrieben:

$$f(t) = c\,a^t = c\,e^{\ln(a)\cdot t}\,.$$

  Hier heißt $f(0) = c$ der Anfangswert des Wachstums. Den positiven Wert $\ln(a)$ nennen wir den **Steigungswert** des exponentiellen Wachstums.

Eigenschaften:

- Das exponentielle Wachstum ist stets unbeschränkt.

Rechnen mit der Exponentialfunktion

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion e^x ist der **(natürliche) Logarithmus ln**. Das bedeutet, "der Logarithmus ln hebt die Funktion e^x auf":

$$\ln(e^x) = x \quad \text{und} \quad e^{\ln(x)} = x\,.$$

Das kennen wir bereits aus "die Wurzel $\sqrt{}$ hebt die Funktion x^2 auf":

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Man kann den Logarithmus nutzen, um Gleichungen zu lösen, die exponentielle Ausdrücke enthalten. Z. B.

- $e^{2x} = 7$

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 7 && \mid \ln \\ 2x &= \ln(7) && \mid :2 \\ x &= \ln(7) : 2 \approx 0{,}973 \end{aligned}$$

- $20 - 18e^{-0{,}03t} = 19$

$$\begin{aligned} 20 - 18e^{-0{,}03t} &= 19 && \mid -20 \\ -18e^{-0{,}03t} &= -1 && \mid :(-18) \\ e^{-0{,}03t} &= \tfrac{1}{18} && \mid \ln \\ -0{,}03t &= \ln\left(\tfrac{1}{18}\right) && \mid :(-0{,}03) \\ t &= -\frac{\ln\left(\frac{1}{18}\right)}{0{,}03} \approx 96{,}348 \end{aligned}$$

2.3 Potenzwachstum

Eine Verallgemeinerung des linearen Wachstums ist das **Potenzwachstum**:

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein Potenzwachstum, wenn es eine natürliche Zahl n und eine Zahl $a > 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t_1 < t_2$

$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2^n - t_1^n)$$

- Ein Potenzwachstum hat stets die Form

$$f(t) = at^n + c$$

wobei $c = f(0)$ der Anfangswert des Wachstumsprozesses ist.

Eigenschaften:

- Für gerades n handelt es sich bei $f(t)$ nur um einen Wachstumsprozess, wenn man den Definitionsbereich auf $t \geq 0$ einschränkt
- Potenzwachstum ist stets unbeschränkt.
- Für $n = 1$ erhält man das lineare Wachstum
- Für $n = 2$ spricht man von quadratischem Wachstum.

2.4 Hyperbolisches Wachstum

Analog zum Potenzwachstum betrachten wir hier das **hyperbolische Wachstum**

- Ein Prozess $f(t), t > 0$ beschreibt ein hyperbolisches Wachstum, wenn es eine natürliche Zahl n und eine Zahl $a > 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $0 < t_1 < t_2$

$$f(t_2) - f(t_1) = -a\Big(\frac{1}{t_2^n} - \frac{1}{t_1^n}\Big) = -a\big(t_2^{-n} - t_1^{-n}\big) > 0$$

- Ein hyperbolisches Wachstum hat stets die Form

$$f(t) = c - \frac{a}{t^n}$$

wobei $c = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Eigenschaften:

- Hyperbolisches Wachstum ist stets beschränkt:
  $c = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ ist die kleinste obere Schranke und der Grenzwert des Wachstumsprozesses (siehe dazu die Ausführungen in Abschnitt 5)

- Der Fall $n = 1$ gibt dieser Familie ihren Namen, denn $f(x) = \frac{1}{x}$ beschreibt eine Hyperbel.

2.5 Polynomielles Wachstum

Als **polynomielles Wachstum** bezeichnet man eine weitere Verallgemeinerung des Potenzwachstums. Hier wird das Wachstum durch ein Polynom beschrieben.

Hier muss man mit dem Definitionsbereich sehr vorsichtig sein, z. B.:

- $f(t) = t^2 - 2t + 3$ beschreibt nur für $t \geq 1$ einen Wachstumsprozess.
- $f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2$ beschreibt nur für $0 \leq t \leq 4$ einen Wachstumsprozess.

Im ersten Fall ist das Wachstum nicht beschränkt. Im zweiten Fall ist es beschränkt durch die Einschränkung des Definitionsbereiches.

3 Spezielle Zerfallsprozesse

Die hier behandelten speziellen Zerfallsprozesse unterscheiden sich von den analogen speziellen Wachstumsprozessen im Wesentlichen durch das Vorzeichen der Steigung (linearer Fall) oder des Vorzeichens des Steigungsfaktors (exponentieller Fall):

3.1 Linearer Zerfall

Auch der **lineare Zerfall** lässt sich auf folgende Arten charakterisieren:

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt einen linearen Zerfall, wenn es eine Zahl $a < 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $0 \leq t_1 \leq t_2$
$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2 - t_1)\,.$$
- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt einen linearen Zerfall, wenn es eine Zahl $a < 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t \geq 0$
$$f(t+1) = f(t) + a\,.$$
- Ein linearer Zerfall wird stets durch eine lineare Funktion mit negativer Steigung $a < 0$ beschrieben:
$$f(t) = at + c\,.$$
Hierbei ist $f(0) = c$ der Anfangswert des Wachstums.

Eigenschaften:

- Der lineare Zerfall ist nach unten nicht beschränkt.

3.2 Exponentieller Zerfall

Der **exponentielle Zerfall** lässt sich auf folgende Arten charakterisieren:

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall, wenn es eine Zahl $0 < a < 1$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t \geq 0$
$$f(t+1) = a \cdot f(t)\,.$$
- Ein exponentieller Zerfall wird stets durch eine Exponentialfunktion mit Basis $0 < a < 1$ beschrieben:
$$f(t) = c\,a^t = c\,e^{\ln(a)\cdot t}\,.$$
Dabei bezeichnet $f(0) = c$ den Anfangswert des Wachstums. Wegen $0 < a < 1$ ist der Steigungswert negativ, also $\ln(a) < 0$.

Eigenschaften:

- Der exponentielle Zerfall ist durch den Wert 0 nach unten beschränkt und hat diesen Wert als Grenzwert, d.h.
  - $f(t) > 0$ für alle Werte t
    Das heißt, 0 ist eine untere Schranke für $f(t)$
  - Für alle kleinen Werte $\epsilon > 0$ findet man ein t, sodass $f(t) < \epsilon$.
    Das heißt, 0 ist sogar die größte untere Schranke

3.3 Hyperbolischer Zerfall

Als abschließendes Beispiel betrachten wir hier den **hyperbolischen Zerfall**

- Ein Prozess $f(t), t > 0$ beschreibt einen hyperbolischen Zerfall, wenn es eine natürliche Zahl n und eine Zahl $a > 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $0 < t_1 < t_2$
$$f(t_2) - f(t_1) = a\Big(\frac{1}{t_2^n} - \frac{1}{t_1^n}\Big) = a\big(t_2^{-n} - t_1^{-n}\big)$$
- Ein hyperbolischer Zerfall hat stets die Form
$$f(t) = \frac{a}{t^n} + c$$
wobei $c = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Eigenschaften:

- Hyperbolische Zerfälle sind stets beschränkt:
  $c = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ ist die kleinste untere Schranke und gleichzeitig der Grenzwert des Zerfallsprozesses.

4 Neue Prozesse konstruieren

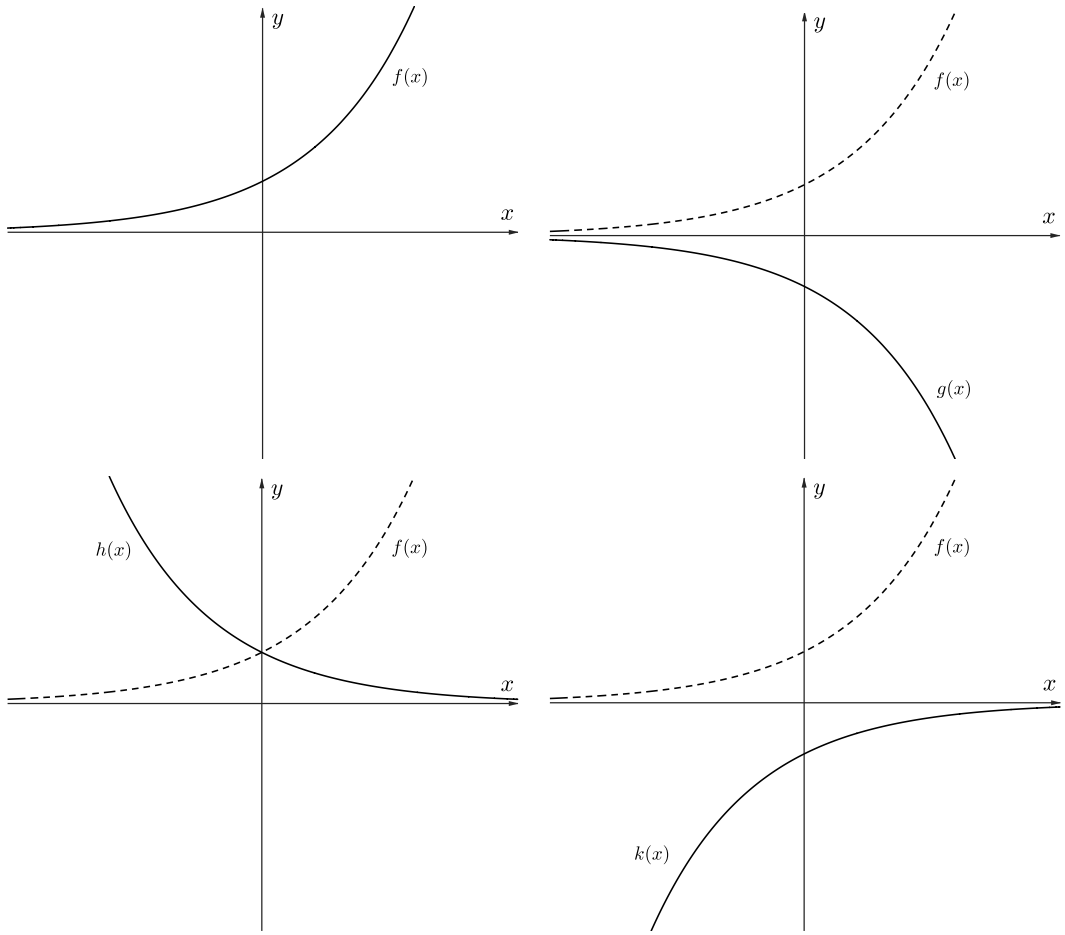
In der Tabelle kürzen wir Wachstumsprozess mit WP und Zerfallsprozess mit ZP ab. Starten wir mit einem Prozess $f(x)$, dann erhalten wir entsprechend der Tabelle neue Prozesse:

	$f(x)$	$g(x) = -f(x)$	$h(x) = g(-x)$	$k(x) = -f(-x)$
ist	WP	ZP	ZP	WP
ist	ZP	ZP	WP	ZP

Der Grund für die Tabelle liegt in folgenden Eigenschaften der Graphen der beteiligten Funktionen:

- Der Übergang von $f(x)$ zu $g(x) = -f(x)$ entspricht einer Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der y-Achse
- Der Übergang von $f(x)$ zu $h(x) = f(-x)$ entspricht einer Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der x-Achse

Am Beispiel $f(x) = e^x$, $g(x) = -f(x) = -e^x$, $h(x) = f(-x) = e^{-x}$, $k(x) = -f(-x) = -e^{-x}$ kann man die Spiegelungen sehr gut erkennen:



In der nachfolgenden Liste notieren wir weitere Möglichkeiten aus Wachstums- und Zerfallsprozessen neue zu konstruieren:

1. (WP $\pm$ Konstante) liefert neuen WP; Beispiel: $f(x) = 4 + e^{3x}$
2. (ZP $\pm$ Konstante) liefert neuen ZP; Beispiel: $f(x) = e^{-3x} - 3$
3. (WP + WP) liefert neuen WP; Beispiel: $f(x) = x^2 + e^{3x}$
4. (ZP + ZP) liefert neuen ZP; Beispiel: $f(x) = e^{-3x} + \frac{1}{x^2}$

5 Beschränkte exponentielle Wachstumsprozesse

Ein realistischer Wachstums- oder Zerfallsprozess unterliegt in der Regel äußeren Einflüssen oder Parametern.

Diese bewirken oft, dass das Wachstum oder der Zerfall beschränkt ist: es stellt sich ein Grenzwert ein (Ladevorgang eines Akkus, Infektion einer Population mit einem Virus, Entladung eines Kondensators, Radioaktiver Zerfall etc.)

Wir beschränken uns zunächst auf Wachstumsprozesse. Ein Teil eines realistischen Wachstumsprozesses lässt sich in einem gewissen Rahmen oft durch eine Funktion vom Typ

$$\boxed{f(t) = b - ce^{-at} \quad \text{mit} \quad a, c > 0,\ b \text{ beliebig}}$$

beschreiben. Dass $f(t)$ ein strenger Wachstumsprozess ist und die weiteren Eigenschaften ergeben sich aus denen des exponentiellen Wachstums bzw. exponentiellen Zerfalls.

Die Funktion $f(t) = b - ce^{-at}$ (mit $a, c > 0$ und b beliebig) hat die folgenden wichtigen Eigenschaften:

- Da die Teilfunktion ce^{-at} immer positiv ist, ziehen wir in $f(t)$ von b immer etwas ab. Damit ist
$$f(t) < b \quad \text{für alle Werte } t$$
Wir sagen auch: b **ist eine obere Schranke der Funktion** $f(t)$.

- Da die Funktion ce^{-at} mit steigenden t-Werten immer kleiner wird, nähert sich $f(t)$ für steigende t-Werte immer mehr dem Wert b an.

  Noch genauer: Es ist zwar $f(t)$ immer kleiner als b, aber jeder y-Wert, der kleiner ist als b, etwa $r < b$, wird von $f(t)$ überschritten. Dazu reicht es, ein t_0 zu finden, sodass $f(t) = r$ ist. Da $f(t)$ ein strenger Wachstumsprozess ist, gilt für $t > t_0$ dann $g(t) > r$, sodass so ein $r < b$ keine obere Schranke sein kann:

  Für alle Werte $r < b$ (in der Nähe von b) findet man ein t, sodass $f(t) > r$.

  Wir sagen dann: b **ist die kleinste obere Schranke von** $f(t)$.

Der Wert b ist in diesem Fall der Grenzwert der Funktion $f(t)$ wenn t über alle Maßen wächst. Wir schreiben dann auch

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = b\,.$$

Das kann man auch quantifizieren und wir führen das zunächst an einem Beispiel durch:

Beispiel 2. Wir sehen uns die Funktion $f(t) = 350 - 50e^{-0{,}005t}$ an: Wir wissen, dass $f(t)$ ein Wachstumsprozess beschreibt und dass $f(t) < 350$ ist.

350 ist aber auch die kleinste obere Schranke. Um das zu begründen suchen wir nun t-Werte, sodass $f(t) > 349,99999$. Dazu lösen wir:

$$\begin{aligned}
350 - 50e^{-0{,}005t} &= 349{,}99999 && \Big| -350 \\
-50e^{-0{,}005t} &= -0{,}00001 && \Big| :(-50) \\
e^{-0{,}005t} &= 0{,}0000002 && \Big| \ln \\
\ln\left(e^{-0{,}005t}\right) &= \ln(0{,}0000002) \\
-0{,}005t &= -15{,}425 && \Big| :(-0{,}005) \\
t &= 3085
\end{aligned}$$

Das heißt, für $t > 3085$ ist $f(t) > 349{,}99999$.

Das können wir für jeden Wert $r < 350$ wiederholen und erhalten auf diese Weise ein t_0 für den alle größeren t einen Funktionswert $f(t) > r$ geben. Damit ist 350 tatsächlich die kleinste obere Schranke.

Führen wir die Rechnung aus dem Beispiel genau so für die allgemeine Funktion $f(t) = b - ce^{-at}$ durch, dann erhalten wir

$$f(t) > b - \epsilon \iff t > -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\epsilon}{c}\right)$$

Bemerkung 3 (**Beschränkte exponentielle Zerfallsprozesse**).

Mit der gleichen Argumentation wie oben erhält man durch

$$g(t) = b + ce^{-at} \quad \text{mit} \quad a, c > 0,\ b \text{ beliebig}$$

einen Zerfallsprozess. Für diesen gilt:

- $g(t) > b$ und
- jeder größere Wert $r > b$ wird unterschritten, wenn man t nur groß genug wählt.

Bemerkung 4 (**Hyperbolisches Wachstum, hyperbolischer Zerfall**).

Ähnlich wie die beschränkten exponentiellen Prozesse lassen sich auch die hyperbolischen Prozesse diskutieren.

1. $f(t) = b - \dfrac{a}{t^n}$ mit $a > 0$ und b beliebig beschreibt für $t > 0$ einen Wachstumsprozess mit:
   - $f(t) < b$ und
   - jeder kleinere Wert $r < b$ wird überschritten, wenn man t nur groß genug wählt.

2. $g(t) = b + \frac{a}{t^n}$ mit $a > 0$ und b beliebig beschreibt für $t > 0$ einen Zerfallsprozess mit:

   - $g(t) > b$ und
   - jeder größere Wert $r > b$ wird unterschritten, wenn man t nur groß genug wählt.

Beispiel 5. Wir sehen uns die Funktion $g(t) = \frac{2}{3} + \frac{7t^4 + 12t^2}{3t^4}$ an. Wir lösen zunächst den Bruch auf und erhalten $g(t) = \frac{2}{3} + \frac{7t^4}{3t^4} + \frac{12t^2}{3t^4} = 3 + \frac{4}{t^2}$.

Es handelt sich bei $g(t)$ um einen hyperbolischen Zerfall mit $b = 3, a = 4, n = 2$ und wir wissen, dass $g(t) > 3$ ist.

Wir suchen Werte für t, sodass $g(t) > 3{,}000001$:

$$\begin{aligned}
3 + \frac{4}{t^2} &= 3{,}000001 && \Big| -3 \\
\frac{4}{t^2} &= 0{,}000001 && \Big| \cdot t^2 \\
4 &= 0{,}000001\, t^2 && \Big| : 0{,}000001 \\
4000000 &= t^2 && \Big| \sqrt{} \\
2000 &= t
\end{aligned}$$

Das heißt, für $t > 2000$ ist $g(t) < 3{,}000001$.

Das können wir für jeden Wert $r > 3$ wiederholen und erhalten auf diese Weise ein t_0 für den alle größeren t einen Funktionswert $f(t) < r$ geben. Damit ist 3 tatsächlich die größte untere Schranke.