Frank Klinker

Zusammengesetze Funktionen

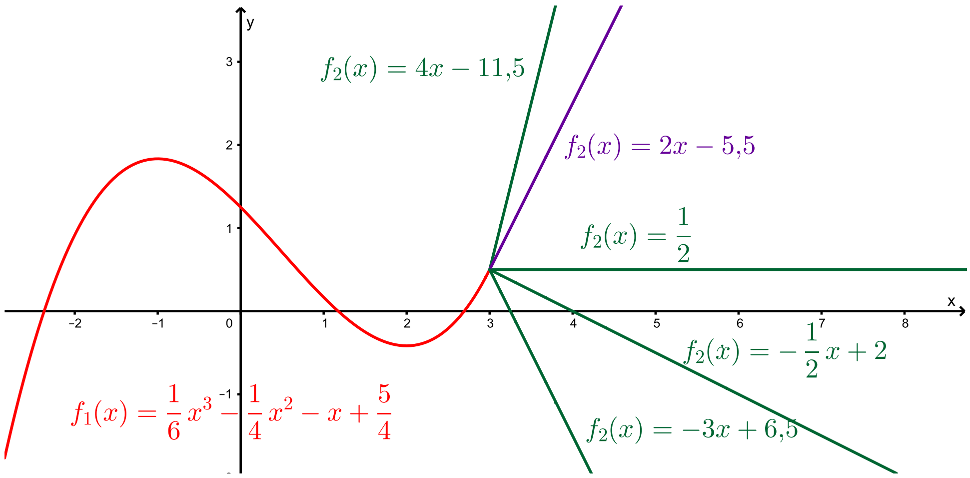
Teil 2: Knicke und Knickfreiheit

3 Knickfrei zusammengesetzte Funktionen

Es gibt zu einer gegebenen Funktion $f_1(x)$ sicher viele Funktionen f_2, die sich sprungfrei zu einer Funktion $f(x)$ zusammensetzen lassen.

Wir sehen uns als Beispiel $f_1(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{5}{4}$ mit $f(3) = \frac{1}{2}$ für $x < 3$ an. Dazu wählen für $f_2(x)$ mit $x \geq 3$ mehrere Geraden, die einen sprungfreien Anschluss liefern, siehe Abb. 1.

Abbildung 1: $f_1(x)$ mit mehreren Geraden $f_2(x)$ als Anschlussfunktion in $x = 3$

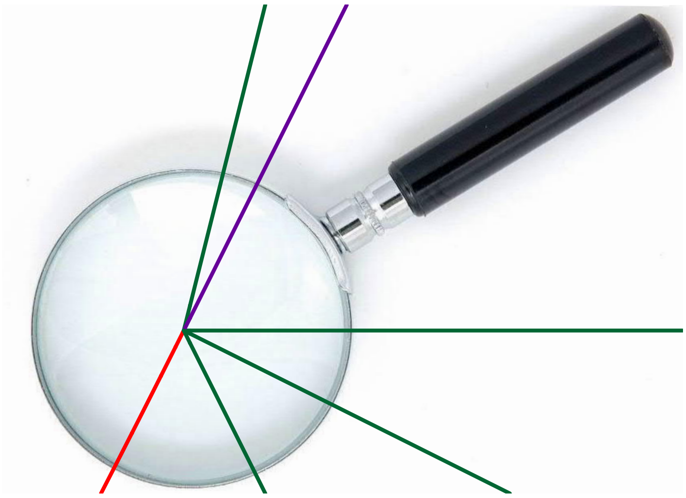


Unter den gewählten Funktionen hat die Funktion $f_2(x) = 2x - 5{,}5$ eine geometrisch besondere Eigenschaft. Um das noch besser zu sehen zoomen wir den Punkt (3/0,5) heran, siehe Abb. 2. Wir sehen, dass alle Zusammensetzungen einen Knick an dem Anschlusspunkt (3/0,5) besitzen, außer der Anschluss mit der speziellen Funktion: hier stimmen die Steigungen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ überein, es gibt als keinen Knick.

Die Untersuchung auf einen Knick ist natürlich nur sinnvoll für sprungfrei zusammengesetzte Funktionen. Da die Steigung durch die Ableitungsfunktion beschrieben wird, können wir wie folgt entscheiden ob $f(x)$ einen Knick hat oder nicht:

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 31. August 2023

Abbildung 2: Der gezoomte Punkt (3/0,5) aus Abb. 1



Knickfreie Funktionen und Funktionen mit Knick

Wir sehen uns eine Funktion $f(x)$ an, die an der Stelle x_0 aus den Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zusammengesetzt :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } \; x < x_0 \\ f_2(x) & \text{für } \; x \geq x_0 \end{cases}$$

- Diese zusammengesetzte Funktion $f(x)$ heißt **knickfrei**, wenn

$$\begin{array}{rll} & f_1(x_0) = f_2(x_0) & \text{(sprungfrei)} \\ \underline{\text{und}} & f_1'(x_0) = f_2'(x_0) & \text{(gleiche Steigung)} \end{array}$$

  D. h. die beiden Teilfunktionen haben an der Nahtstelle den gleichen Funktionswert und die Ableitungsfunktionen stimmen dort überein.

- Ist $f(x)$ zwar sprungfrei, aber die Ableitungsfunktionen haben verschiedene Werte, so hat $f(x)$ einen **Knick**.

Auch hier kann man mit Hilfe der beiden Bedingungen an die Knickfreiheit aus einer Menge mit Hilfe von Parametern beschriebenen Funktionen spezielle auswählen:

Beispiel 1. Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sollen an der angegebenen Stelle knickfrei zusammengesetzt werden.

a) $f_1(x) = 3x^3 - 7x^2 - 14x + 20$ für $x < -1$, $f_2(x) = -x^2 + ax + b$ für $x \geq -1$. Für die Knickfreiheit benötigen wir die Ableitungen:

$$f_1'(x) = 9x^2 - 14x - 14\,, \quad f_2'(x) = -2x + a\,.$$

Die Bedingungen lauten

$$\left.\begin{aligned} f_1(-1) &= f_2(-1) \\ f_1'(-1) &= f_2'(-1) \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} 24 &= -1 - a + b \\ 9 &= 2 + a \end{aligned}\right.$$

Die zweite Gleichung liefert $a = 7$, was in die erste Gleichung eingesetzt $b = 32$ gibt. Für Knickfreiheit muss also $f_2(x) = -x^2 + 7x + 32$ gewählt werden.

b) $f_1(x) = x^3 + ax - 4$ für $x < 2$, $f_2(x) = ax^2 + bx + 2$ für $x \geq 2$. Für die Knickfreiheit benötigen wir die Ableitungen:

$$f_1'(x) = 3x^2 + a\,, \quad f_2'(x) = 2ax + b\,.$$

Die Bedingungen lauten

$$\left.\begin{aligned} f_1(2) &= f_2(2) \\ f_1'(2) &= f_2'(2) \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} 4 + 2a &= 4a + 2b + 2 \\ 12 + a &= 4a + b \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} 2a + 2b &= 2 \\ 3a + b &= 12 \end{aligned}\right.$$

Das ist ein LGS für die zwei Parameter a und b:

$$\left.\begin{aligned} 2a + 2b &= 2 \\ 3a + b &= 12 \end{aligned}\right\} \overset{I:2}{\iff} \left\{\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 3a + b &= 12 \end{aligned}\right\} \overset{II-I}{\iff} \left\{\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a &= 11 \end{aligned}\right\} \overset{II:2}{\iff} \left\{\begin{aligned} a + b &= 1 \\ a &= 5{,}5 \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{a \text{ in } I}{\iff} \left\{\begin{aligned} b &= -4{,}5 \\ a &= 5{,}5 \end{aligned}\right.$$

Die gesuchten Funktionen für einen knickfreien Anschluss an der Stelle $x_0 = 2$ sind also $f_1(x) = x^3 + 5{,}5x - 4$ für und $f_2(x) = 5{,}5x^2 - 4{,}5x + 2$